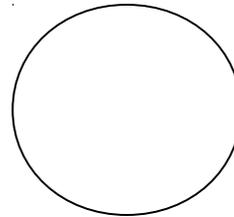
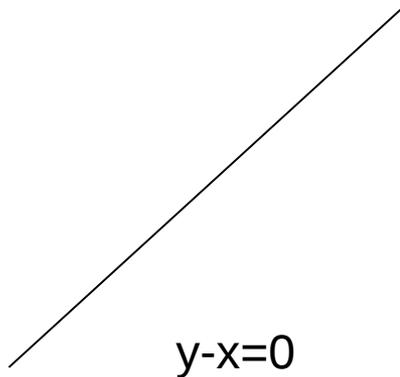


Comment dessiner une courbe algébrique

Une courbe algébrique plane de degré d est un ensemble de points (x,y) du plan qui vérifient $f(x,y)=0$, où f est un polynôme de degré d .



$$y^2 = -x^2 + 1$$

Degré de la courbe = degré du polynôme

$y - x^2$ est de degré 2

$xy + 3x + 1$ est de degré 2 ($= 1+1$)

$x^3y^2 + y^4$ est de degré 5 ($= 2+3$)

$$\deg(P) = a$$

$$\deg(Q) = b$$

$$\deg(PQ) = a+b.$$

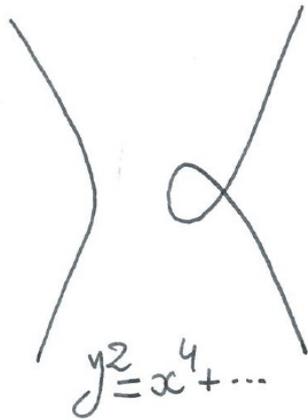
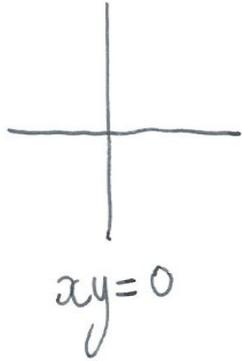
Objectif

Décrire les formes générales du possibles des graphes des courbes lisses d'un degré fixé.

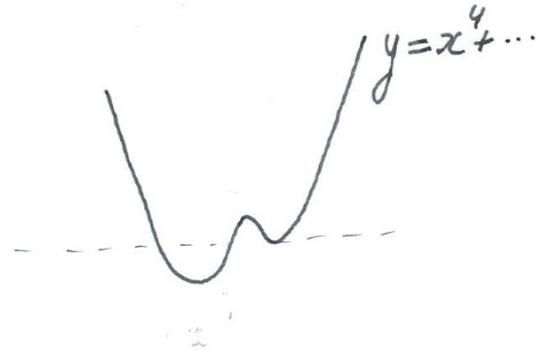
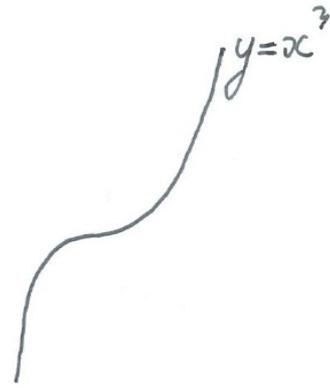
C'est une classification *topologique*. Cela veut dire que les déformations sans croisement et sans coupure sont autorisées.

Courbes lisses = non singulières
sans pointes et sans croisement.

Singulières.

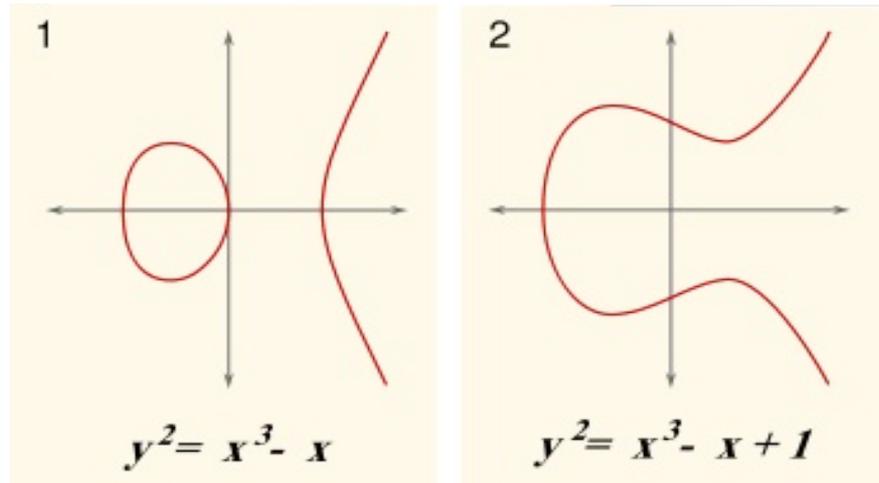


lisses



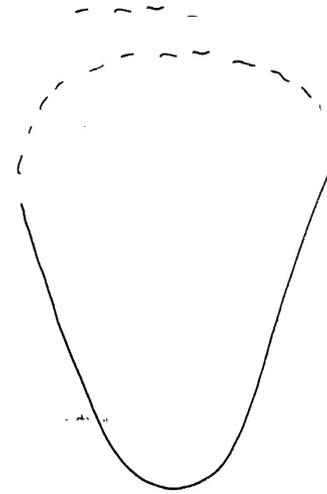
Plusieurs morceaux

On remarque que le graphe peut-être constitué de plusieurs « morceaux » (on dit composantes connexes).



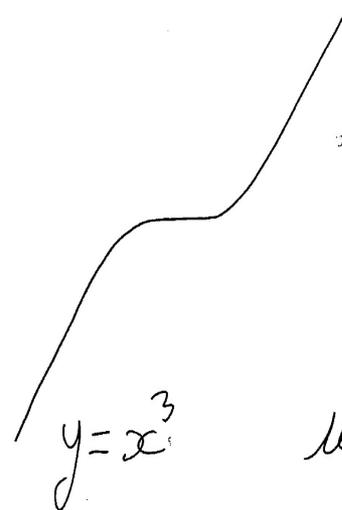
Il y a deux types de « morceaux » : les ovales et les pseudo-droites (qui traversent la page). Les courbes de degré pair n'ont que des ovales. Les courbes de degré impair ont une et une seule pseudo-droite.

Dans le plan classique
ce n'est pas toujours évident. Il faut imaginer que les branches de la parabole se rejoignent à l'infini.



$$y = x^2$$

Un ovale



$$y = x^3$$

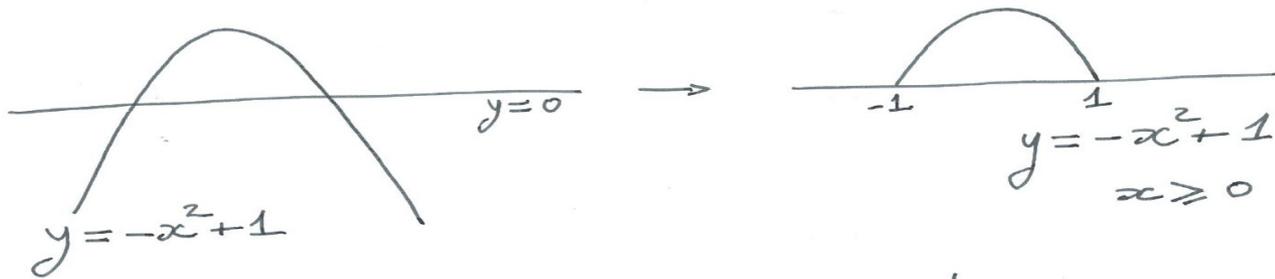
Une pseudo-droite

Construction par symétrie horizontale

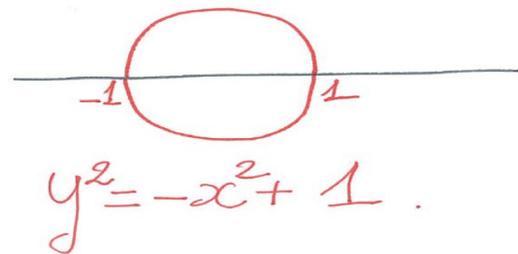
Une première méthode consiste à prendre le graphe d'une fonction polynomiale $y=f(x)$ et à le « symétriser » en posant $y^2=f(x)$.

On trouvera ainsi toutes les courbes de degré 3.

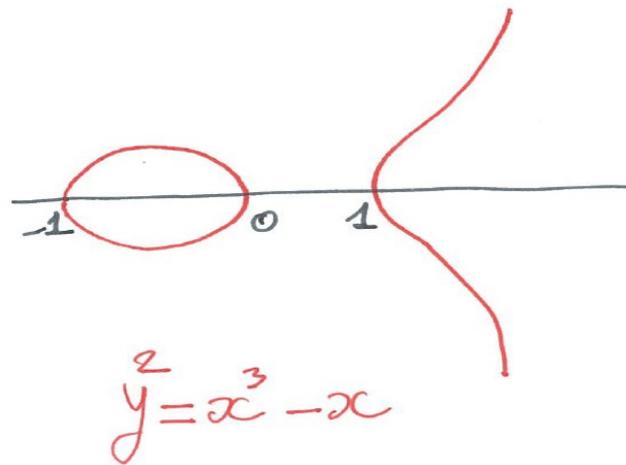
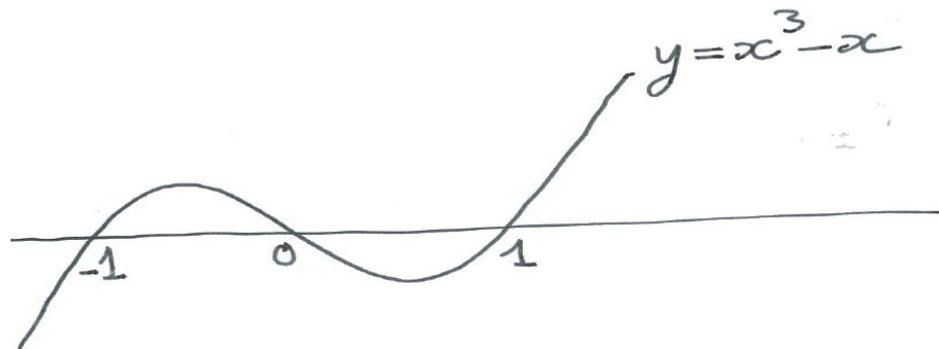
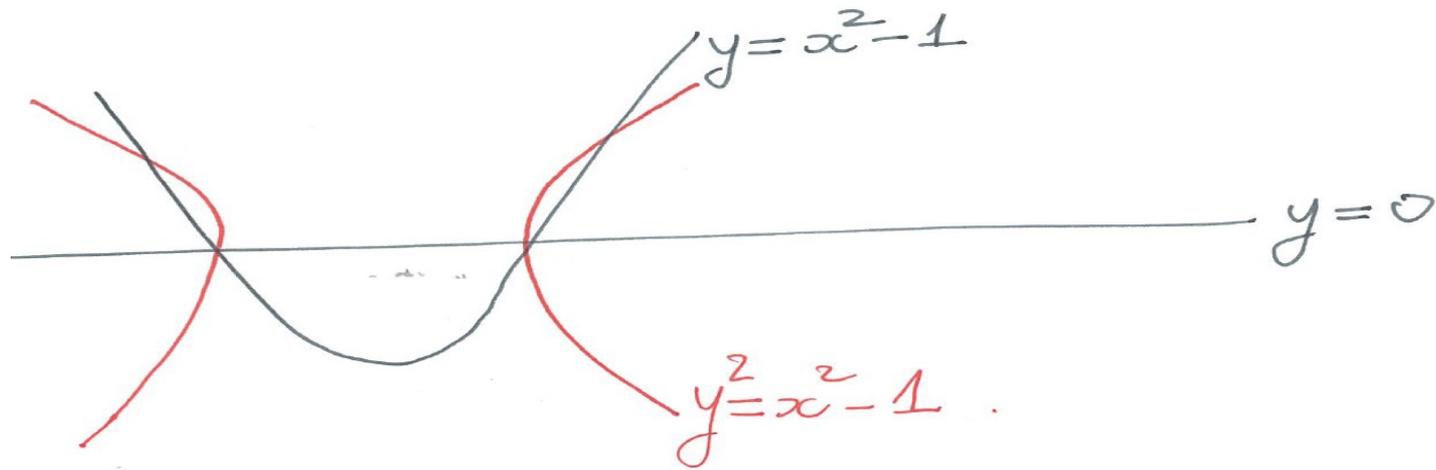
On efface la partie négative
et on symétrise

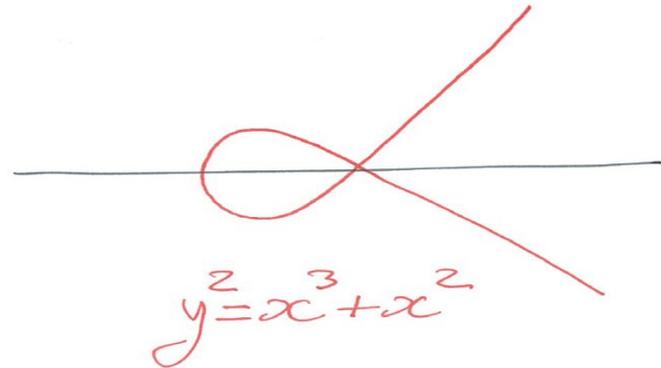
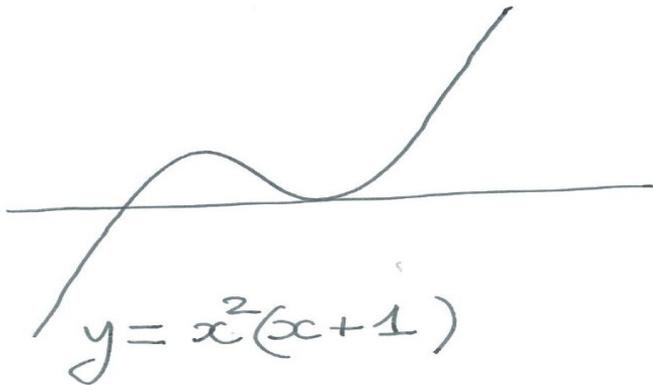
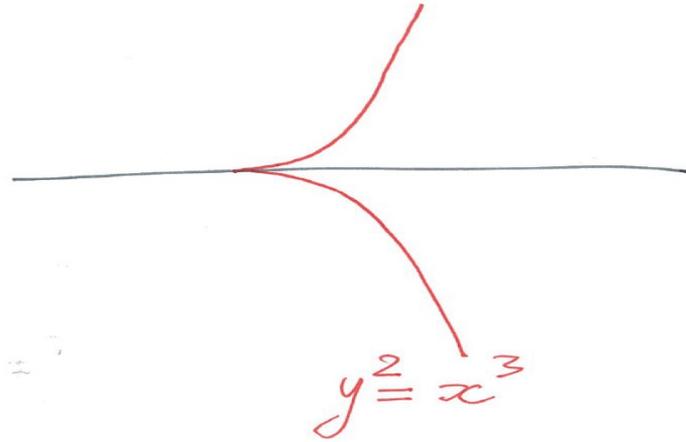
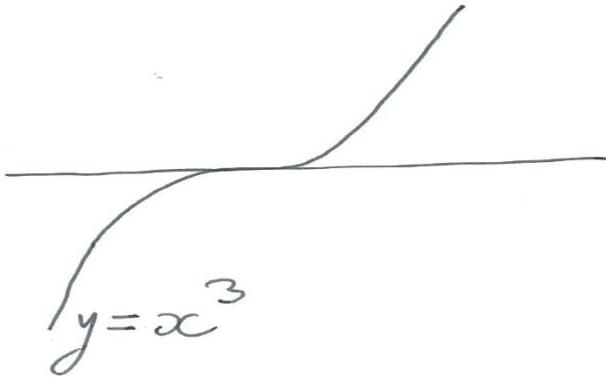
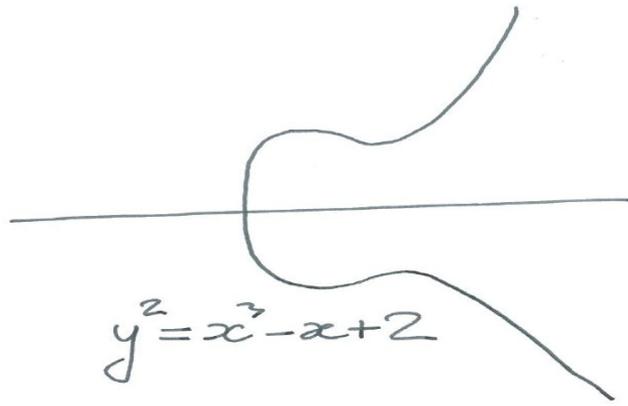
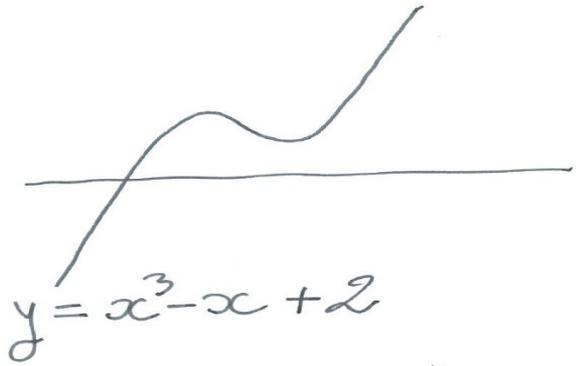


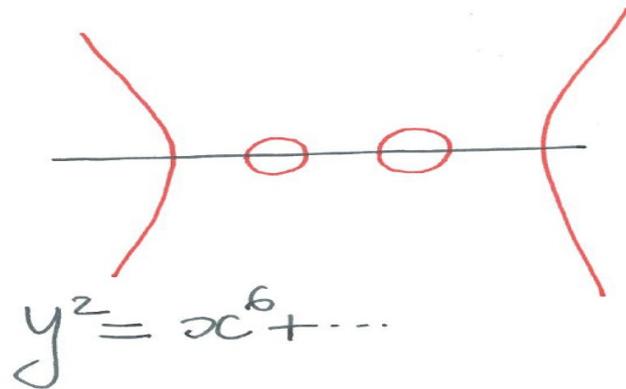
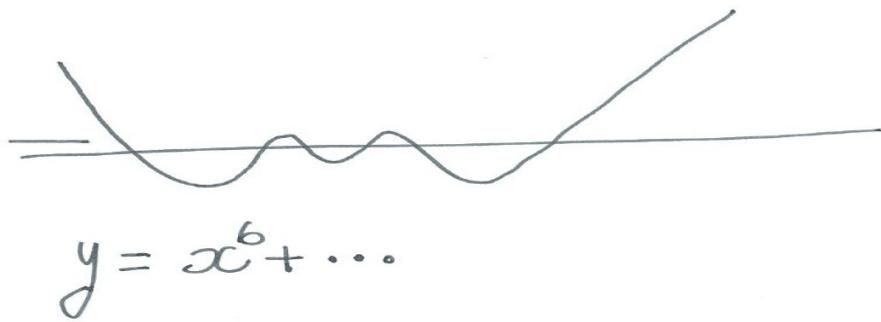
Calcul de dérivées.



Un carré est toujours positif





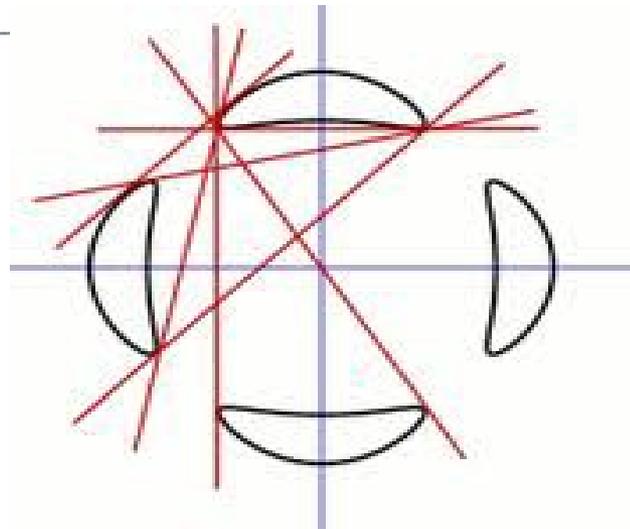


"Morceaux" séparés = composantes connexes.

mais toutes les courbes ne peuvent pas s'obtenir comme cela.

Par exemple

La quartique de Trott



Combien de « morceaux »

Avant de poursuivre, et pour ne pas avancer à l'aveuglette, on peut se demander si le nombre de morceaux possibles est borné.

C'est ce à quoi répond le théorème de Harnack.

Théorème de Harnack (1876)

a) Le nombre c de composantes connexes est borné par

$$\frac{1 - (-1)^d}{2} \leq c \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$$

où d est le degré de la courbe considérée.

b) Toutes les valeurs sont atteintes.

0 ou 1 ovale en degré 2

1 pseudo-droite seule ou 1 pseudo-droite et un ovale en degré 3

De 0 à 4 ovales en degré 4,

De 0 à 11 ovales en degré 6.

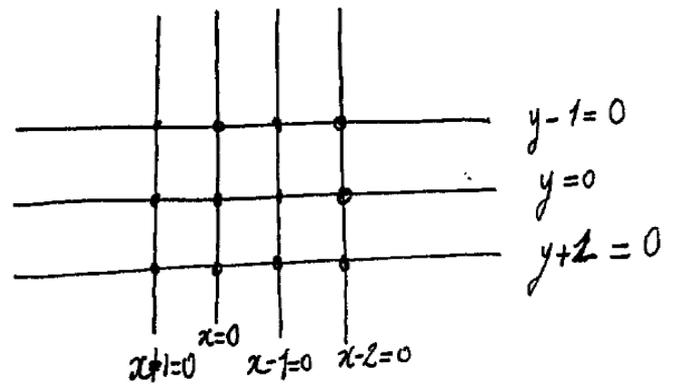
Limitation des cas

- Le théorème de Harnack,
- Le théorème de Bézout (1785),
- Les congruences de Gudkov (1969).

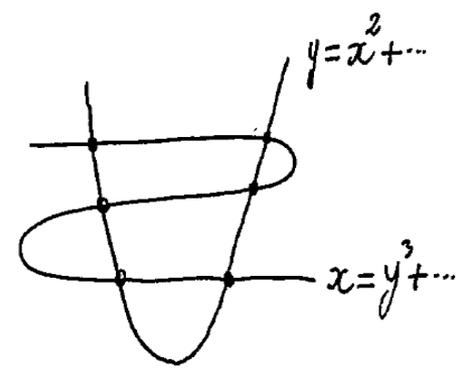
Théorème de Bézout

Une courbe de degré n et une courbe de degré m se rencontrent en au plus $n \cdot m$ points

ou en une infinité de points.

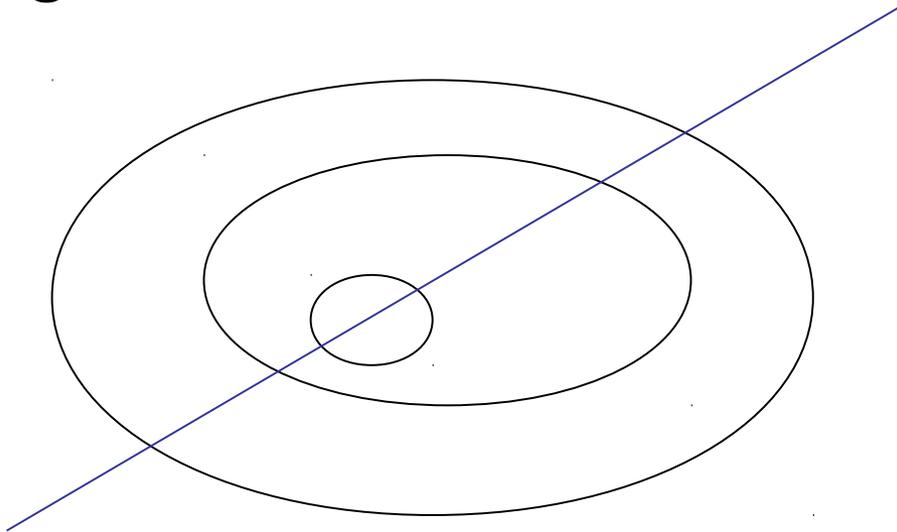


$$\{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0\} \cap \{y^3 - y = 0\} = 12 \text{ pts}$$



Contraintes dues à Bézout

La droite coupe la courbe en 6 points. Donc le degré vaut 6, au moins.

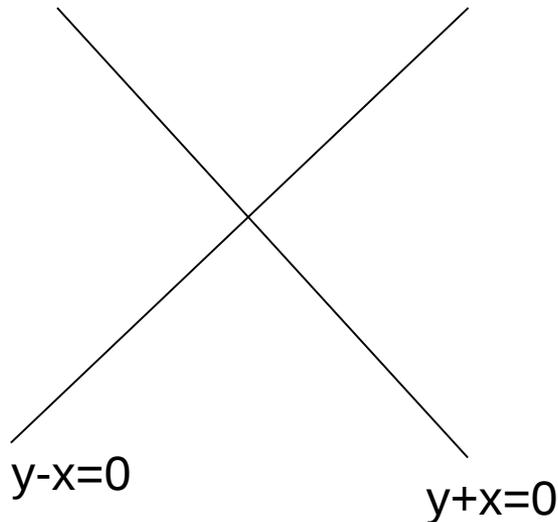


Construction de courbes par la méthode de Harnack.

On considère la réunion de deux courbes.

Leurs équations sont $f=0$ et $g=0$.

L'équation de la réunion est $fg=0$.



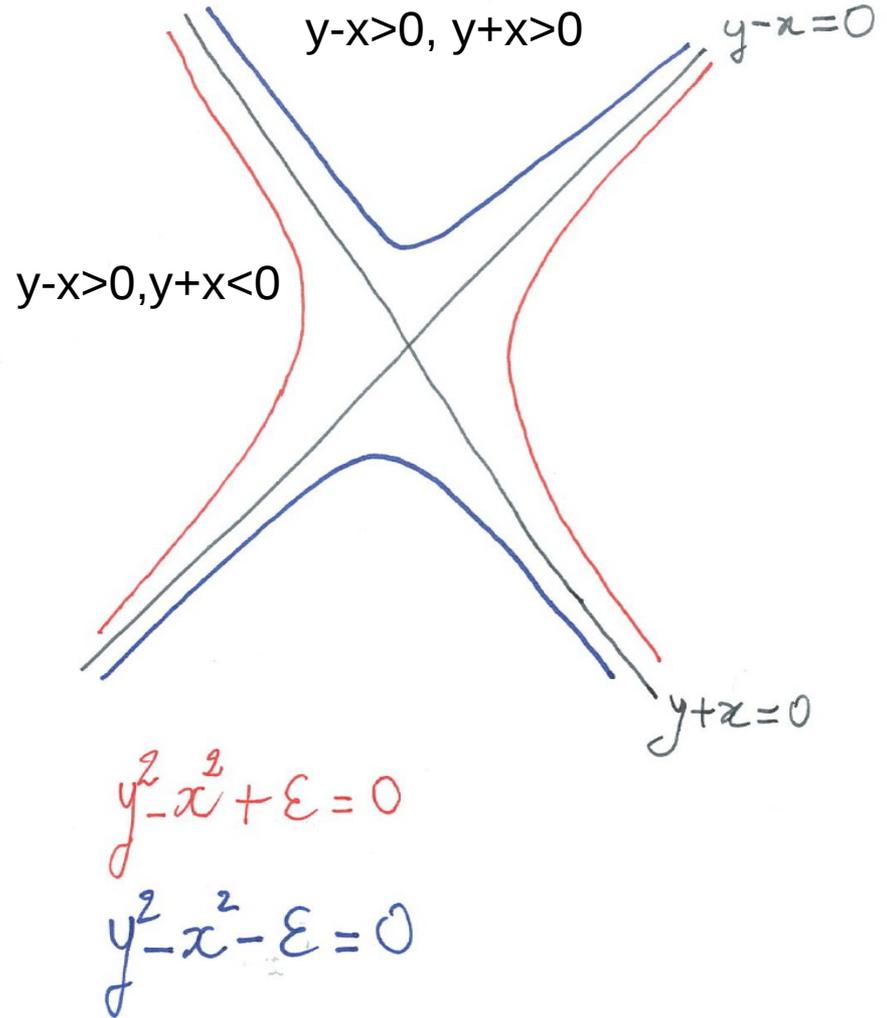
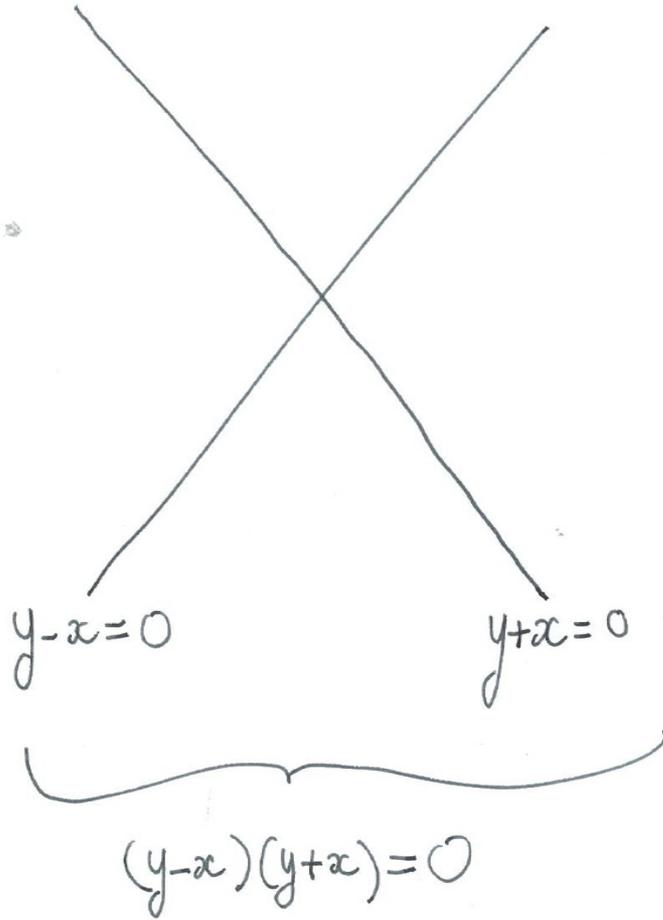
L'équation de la réunion est $(y-x)(y+x)=0$.

On va déformer ce graphe en introduisant un paramètre ϵ petit.

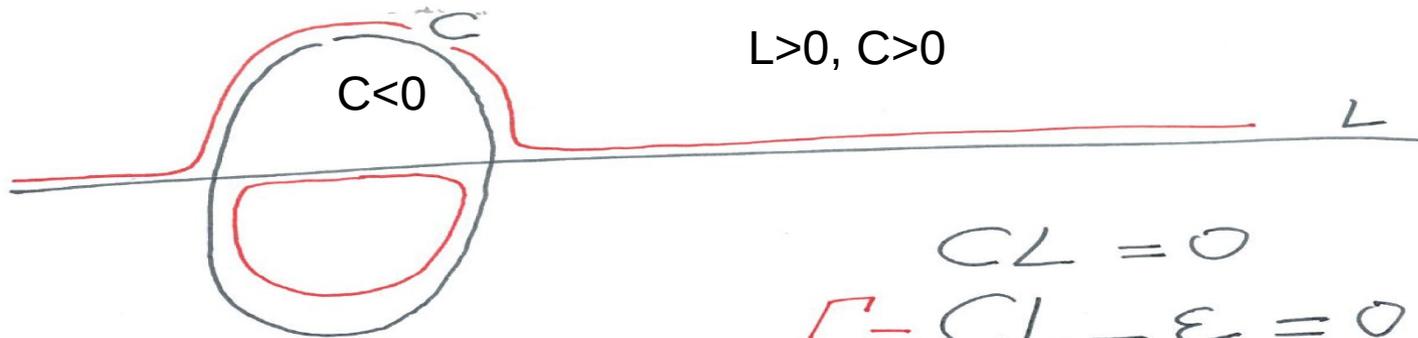
On considère $fg=\epsilon$. Les points d'intersection disparaissent.

Petites perturbations.

$\varepsilon > 0$ ε petit.



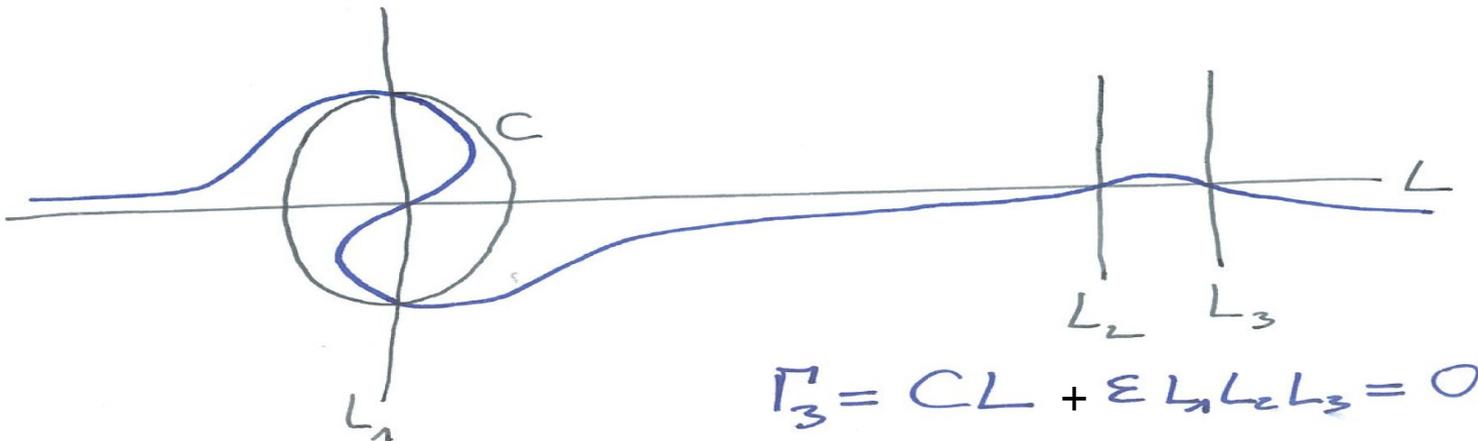
Déformations Perturbations



$$CL = 0$$

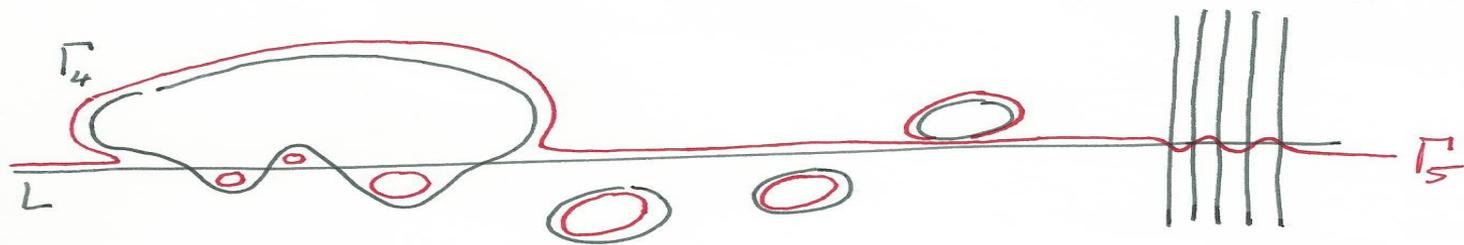
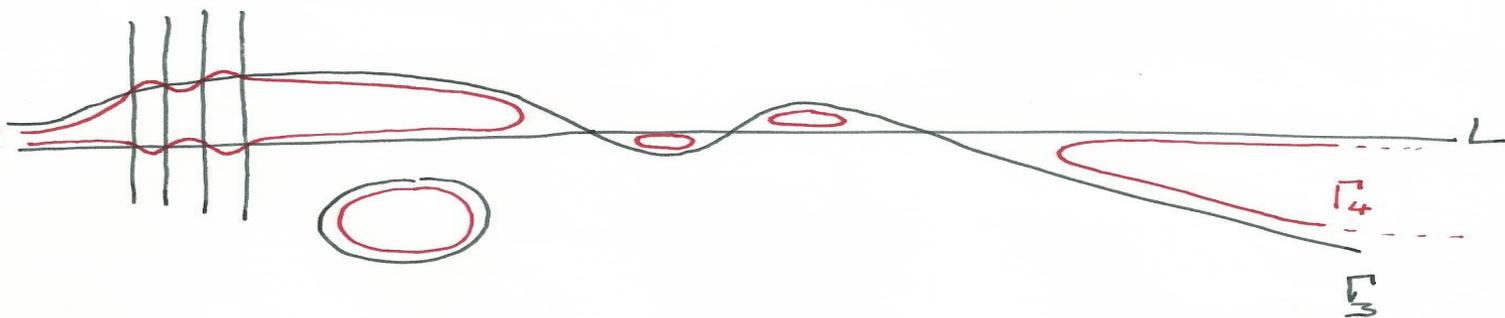
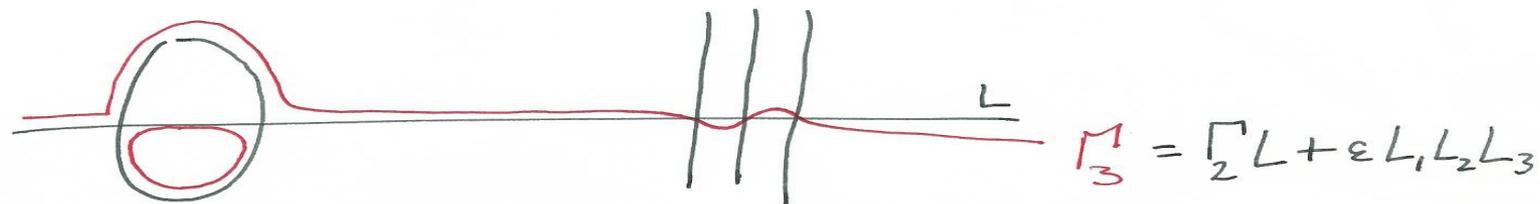
$$\Gamma_3 = CL - \varepsilon = 0$$

Un ovale, une pseudo-droite.



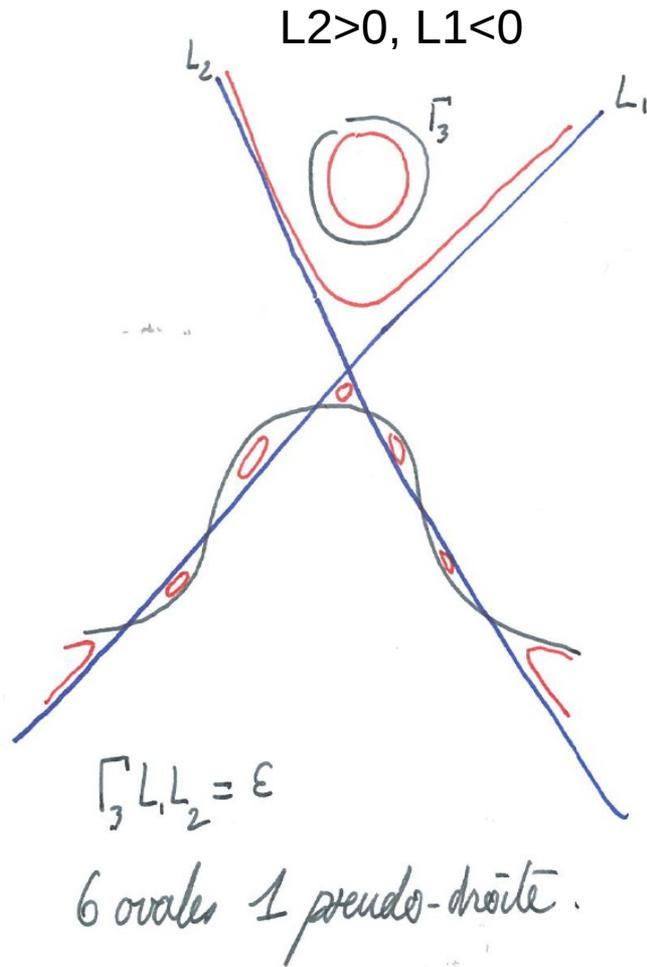
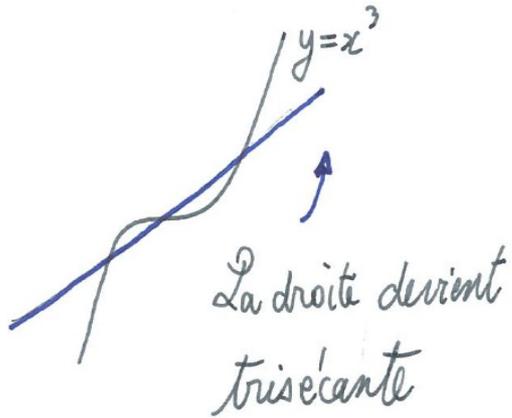
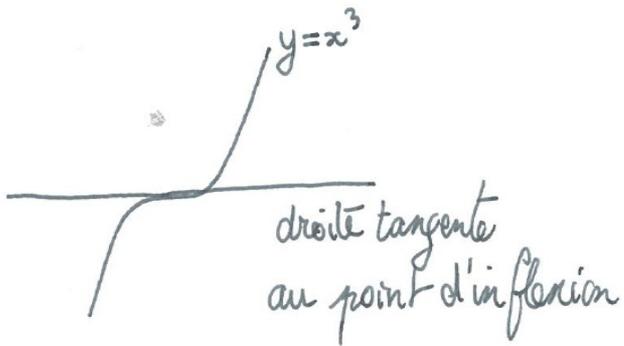
$$\Gamma_3 = CL + \varepsilon L_1 L_2 L_3 = 0$$

Méthode de Harnack



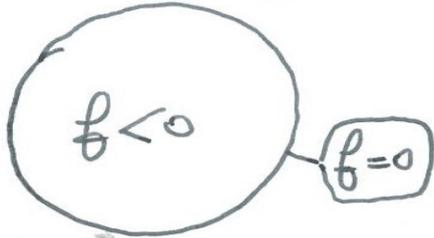
Γ_5 : 6 ovales, 1 pseudo-droite.

Autre construction
due à Harnack.



Construction de Hilbert

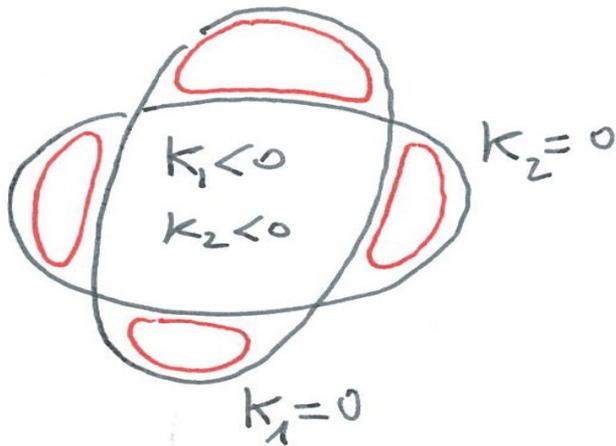
$$f > 0$$



$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$f(0,0) = 0 + 0 - 1 < 0$$

$$K_1 K_2 + \varepsilon = 0$$

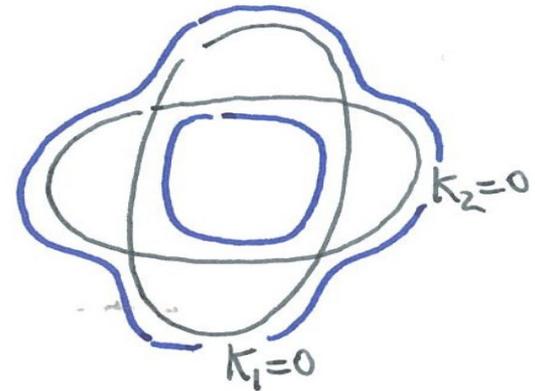


4 ovales

$$K_1 > 0$$

$$K_2 > 0$$

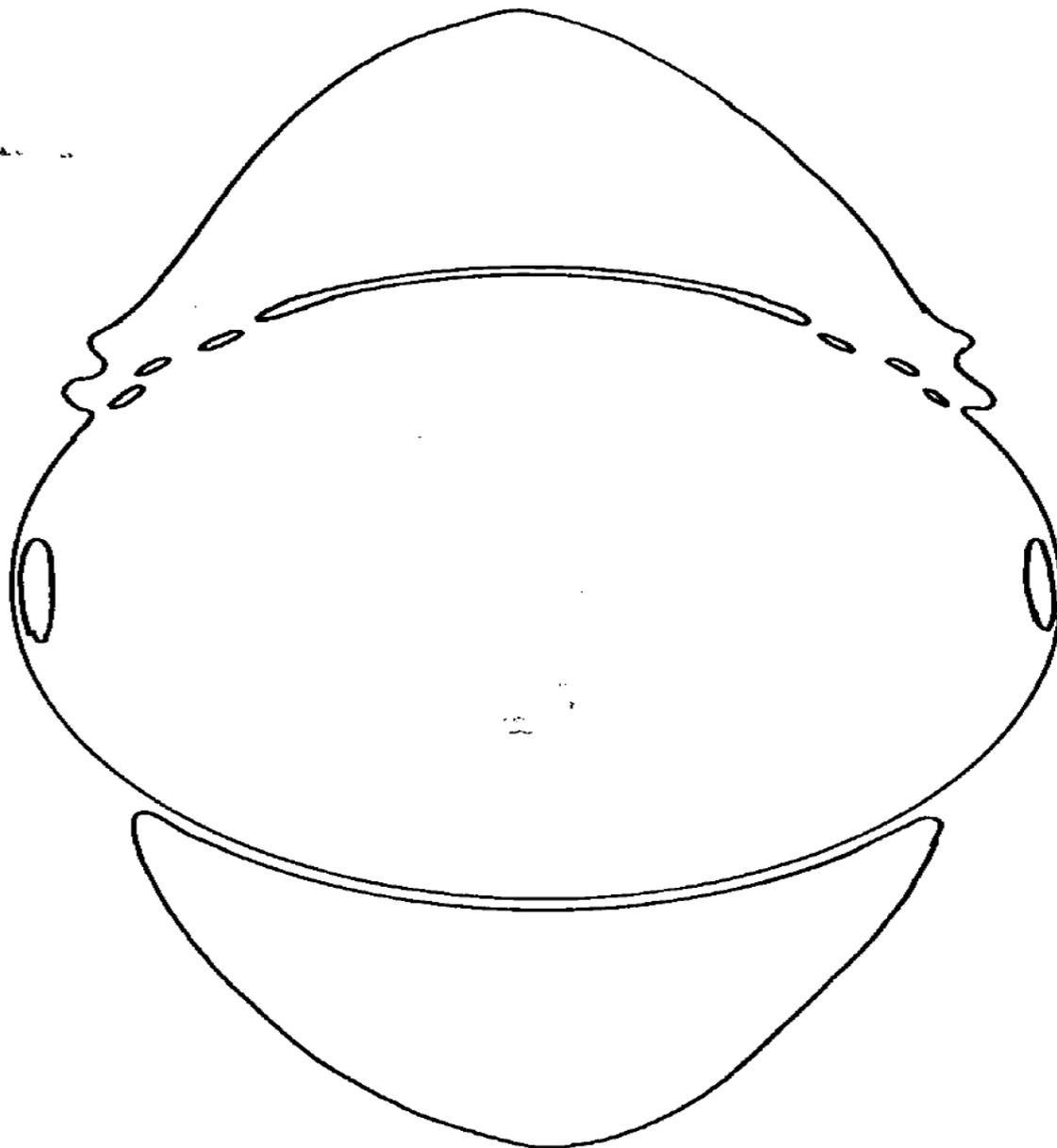
$$K_1 K_2 - \varepsilon = 0$$



2 ovales



On considère la courbe $C_4 = K_1 \cdot K_2 + \varepsilon L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4$, ε petit et $\varepsilon > 0$. La courbe C_4 coupe K_1 en 8 points. La courbe $C_4 \cdot K_1 = \eta$, η petit, est de type $\frac{9}{1}1$.



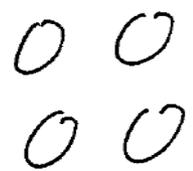
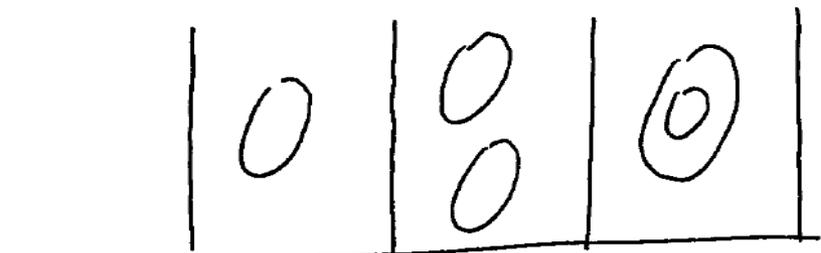
Une variante de cette méthode donne les types $\frac{2}{1}6$ et $\frac{6}{1}2$.

Gudkov 1970

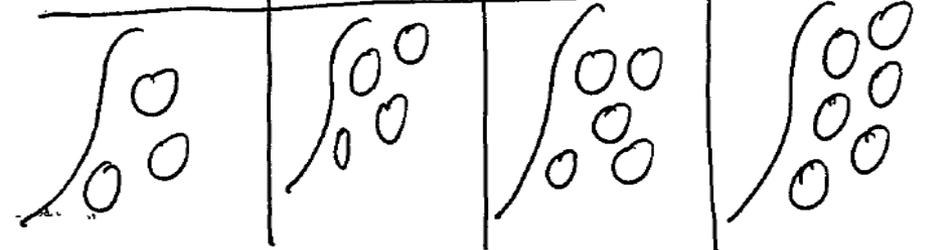
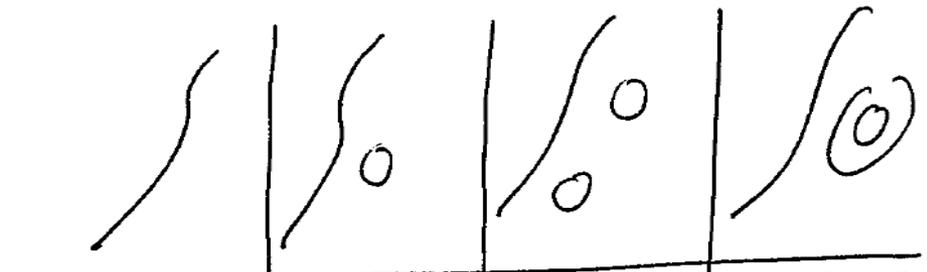
- Les méthodes de Hilbert (1900) et Harnack (1876) permettent de décrire toutes les courbes de degré plus petit ou égal à 5.
- Pour le degré 6 il faut attendre Gudkov pour que la classification soit complétée. Il montre qu'il y a trois types de courbes maximales. Les deux premières sont obtenues par les méthodes de ses prédécesseurs. La troisième par une méthode de perturbation légèrement différente.

1.13.B (Gudkov's Theorem [GU-69]). The 56 isotopy types listed in Table 4, and no others, can be realized by nonsingular real projective algebraic plane curves of degree 6.

$\langle 9 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 5 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 1 \amalg 1 \langle 9 \rangle \rangle$
$\langle 10 \rangle \langle 8 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 5 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 1 \amalg 1 \langle 8 \rangle \rangle \langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$
$\langle 9 \rangle \langle 7 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 6 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 6 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 7 \rangle \rangle \langle 1 \langle 8 \rangle \rangle$		
$\langle 8 \rangle \langle 6 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 6 \rangle \rangle \langle 1 \langle 7 \rangle \rangle$		
$\langle 7 \rangle \langle 5 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle \langle 1 \langle 6 \rangle \rangle$		
$\langle 6 \rangle \langle 4 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle \langle 1 \langle 5 \rangle \rangle$		
$\langle 5 \rangle \langle 3 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle \langle 1 \langle 4 \rangle \rangle$		
$\langle 4 \rangle \langle 2 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \langle 3 \rangle \rangle$		
$\langle 3 \rangle \langle 1 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle \langle 1 \langle 2 \rangle \rangle$	$\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$	
$\langle 2 \rangle \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$		
$\langle 1 \rangle$		
$\langle 0 \rangle$		



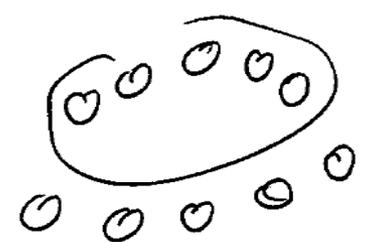
Courbes de degré 4



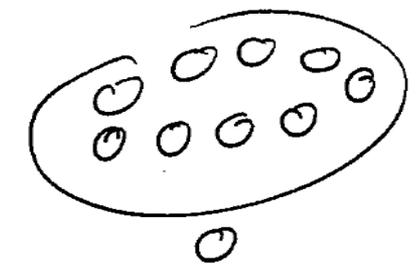
Courbes de degré 5



Harnack



Gudkov



Hilbert

Courbes maximales de degré 6

Le degré 7

La classification complète des courbes de degré 7 sera réalisée en 1980 par Oleg Viro. Si Gudkov faisait encore de la perturbation, Viro lui introduit une méthode totalement nouvelle et originale :

« Le patchworking. »

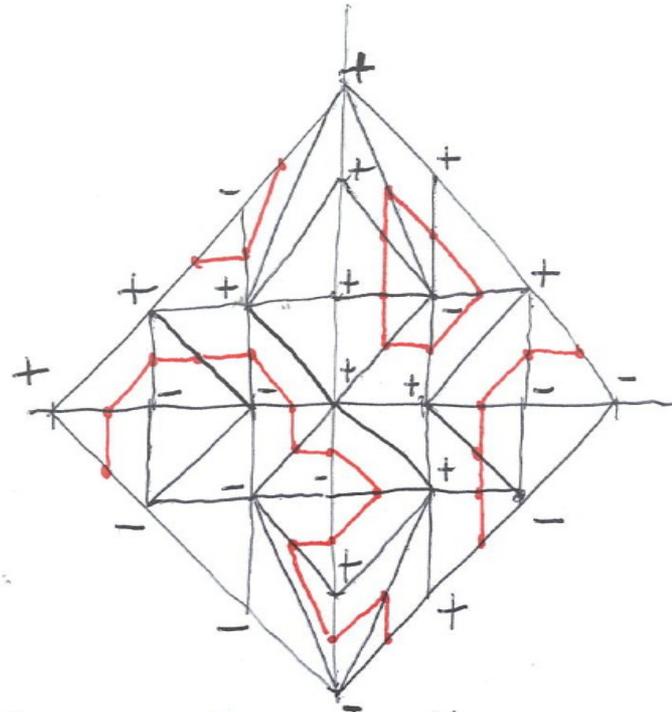
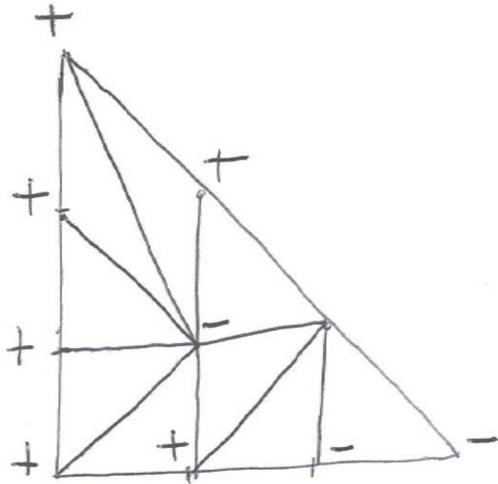
composantes sont des ovals. Une courbe de degré 7 est réunion d'une pseudo-droite et d'au plus 15 ovals, d'après l'inégalité de Harnack. Viro a classé toutes les courbes de degré 7 en 1980. Dans la proposition suivante, qui décrit le résultat de Viro, on appelle ovale libre un ovale qui n'est contenu dans aucun autre ovale.

5.2 Proposition (Viro ; cf. [Vi 84]).— *Le type topologique du plongement d'une courbe de degré 7 est constitué d'une pseudo-droite, et d'ovales avec l'une des 121 possibilités suivantes :*

- i) *Un ovale contenant a ovals, et b ovals libres, avec $a + b \leq 14$ et $1 \leq a \leq 13$.*
- ii) *α ovals libres, avec $0 \leq \alpha \leq 15$*
- iii) *3 ovals emboîtés.*

Montrons par exemple comment construire une courbe de degré 7 de type *i*), avec $a = 10$, $b = 4$ (Cette courbe était inconnue jusqu'à Viro, et ne peut pas être construite par une méthode "à la Harnack").

Le Patchworking de Viro



(3) Tracé des segments qui formeront la T-courbe.

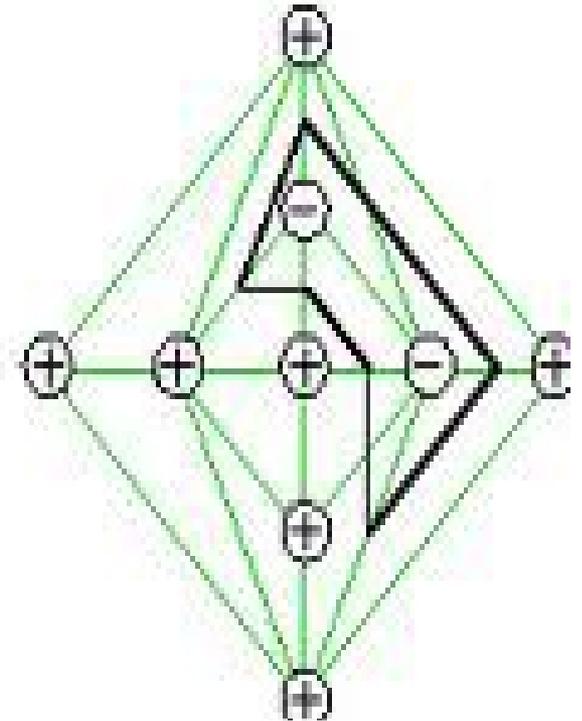
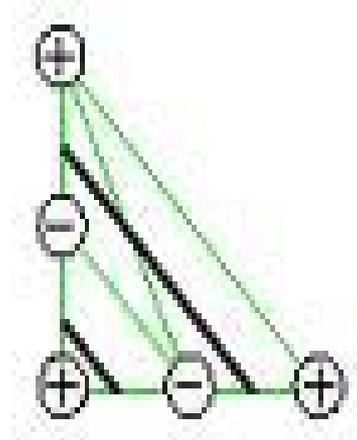
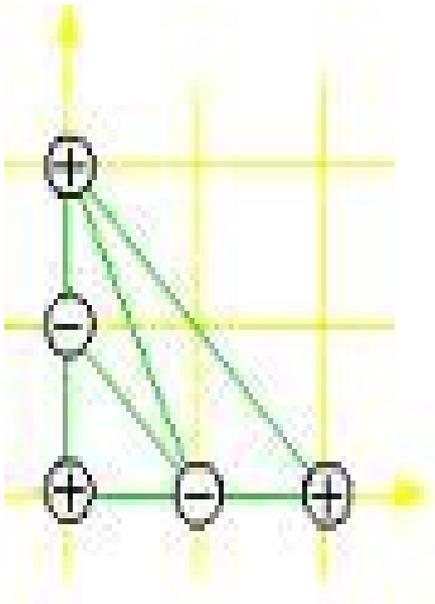
(4) On recolle en identifiant les symétriques du bord.

Règle des signes :



(1) Triangulation
affectation des signes

(2) Symétrie
centrale.

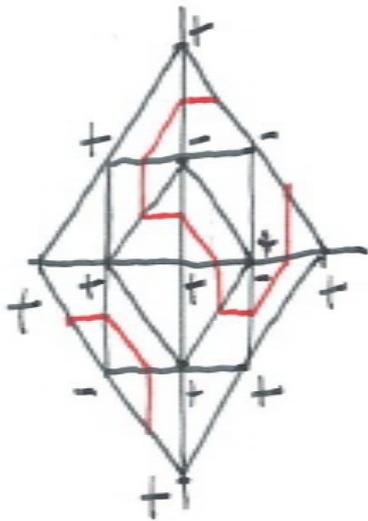


Une courbe de degré 2 et son ovale

Théorème du patchwork

- On considère un triangle T de sommets $(0,0)$, $(0,m)$ et $(m,0)$ muni de sa triangulation convexe.
- On obtient une « courbe » affine par morceaux.
- Alors : *Il existe une courbe algébrique lisse de degré m qui a le même type topologique.*

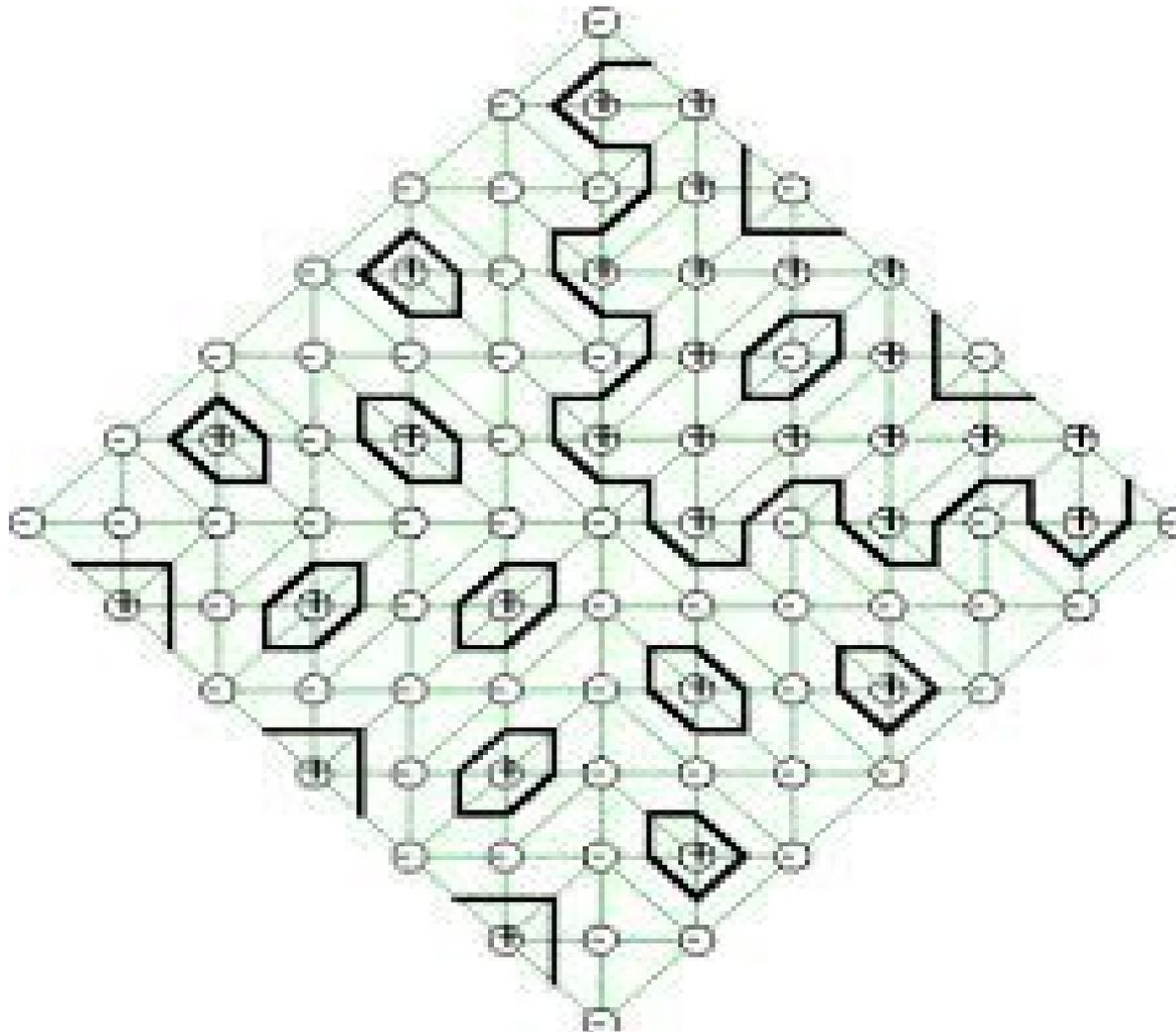
Théorème du patchwork



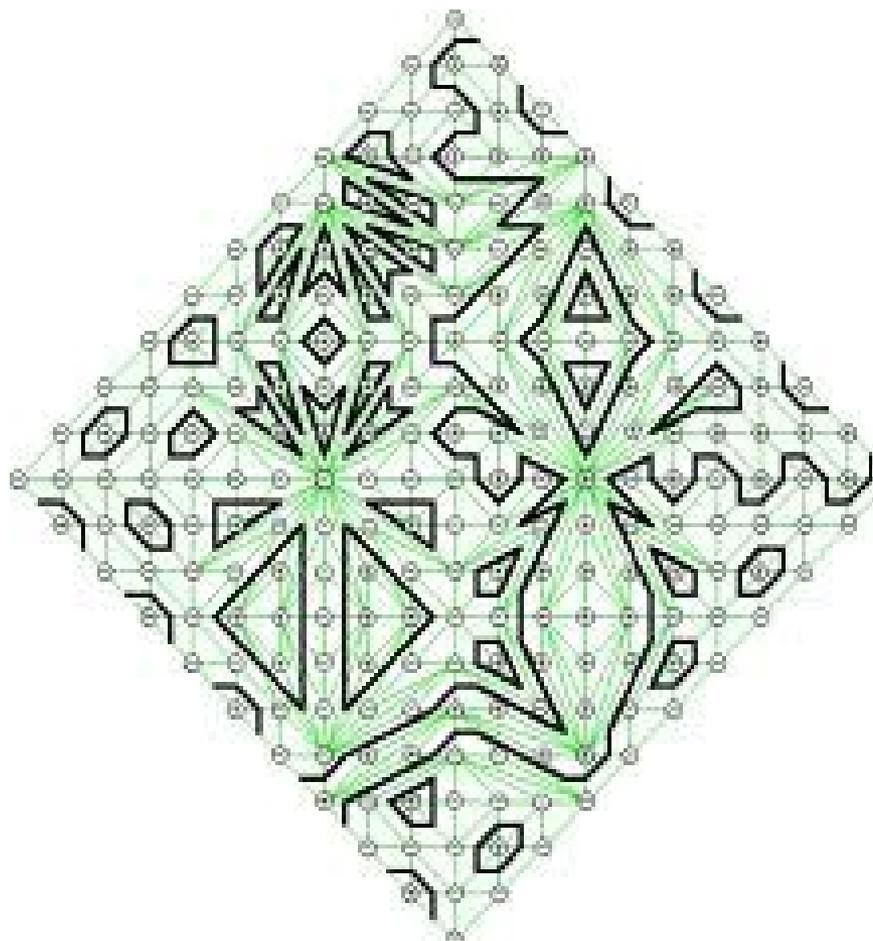
$$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$$

Pour la limite on pondère

$$t^{a_{20}} x^2 - t^{a_{11}} xy + t^{a_{02}} y^2 - t^{a_{10}} x - t^{a_{01}} y + t^{a_{00}} = 0 \quad t_{\text{petit}}$$



Une courbe de degré 6 de type $9\langle 1U\langle 1 \rangle \rangle$



p = nombre d'ovales pairs
 m = nombre d'ovales impairs

Conjecture de Ragsdale

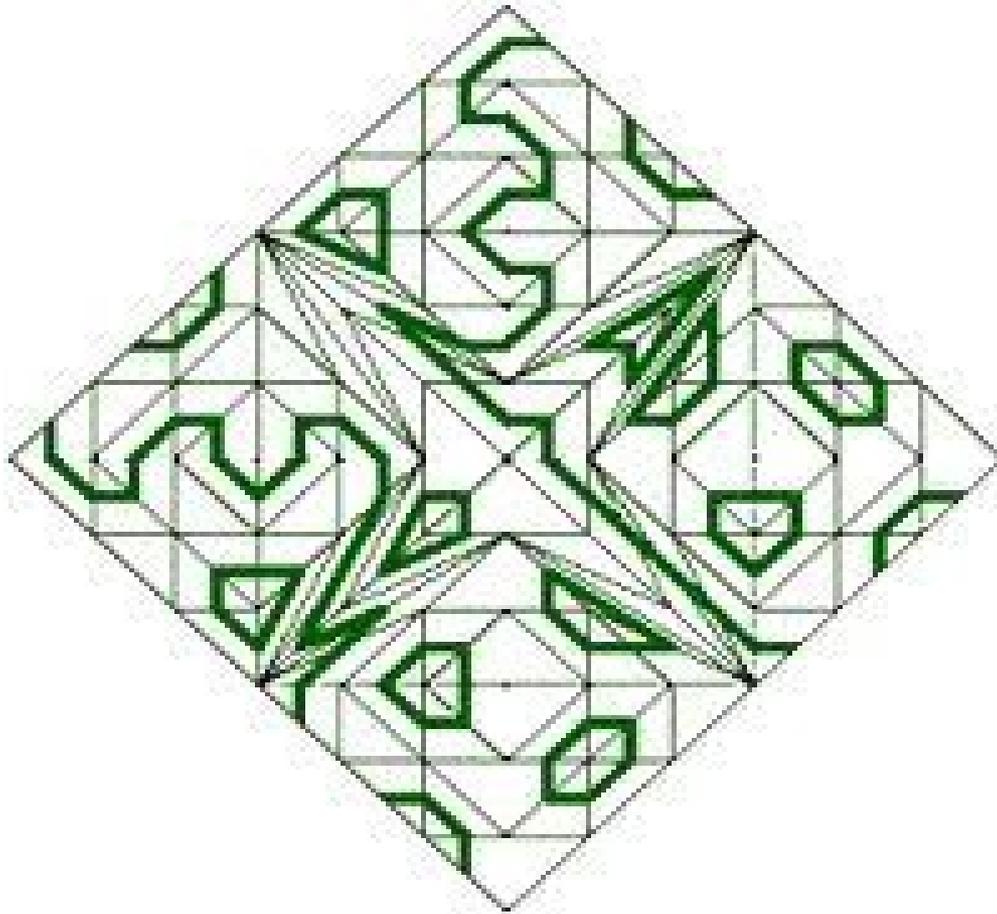
$$d = 2k$$

$$p \leq \frac{3k(k-1)}{2} + 1$$

$$m \leq \frac{3k(k-1)}{2}$$

Une courbe de degré 10 avec 32 ovales impairs qui a permis à Itenberg (en 2000) d'infirmar la conjecture de Ragsdale (1906).

Patchwork de la courbe de Gudkov



A vous de travailler

La classification des courbes est toujours incomplète à partir du degré 8.

Bibliographie :

Norbert A'Campo. Sur la première partie du seizième problème de Hilbert. Sémin. Bourbaki 1978-1979.

Ilya Itenberg. Construction of real algebraic varieties. 2002

Jean-Jacques Risler. Construction d'hypersurfaces réelles. Sémin. Bourbaki 1992-1993.

Oleg Viro. Introduction to topology of real algebraic varieties.

Oleg Viro. Patchworking real algebraic varieties.