Mathématiques sous contrainte

Jean Vallès

21/02/2014

1 Jean Victor Poncelet

Né en 1788 mort en 1867. Ancien élève de l'école polytechnique (créée en 1794 afin de former des ingénieurs) où il a suivi les cours de géométrie descriptive de Gaspard Monge [1]. Lieutenant de la "grande armée" blessé sur le front Russe lors de la bataille de Krasnoe pendant la retraite de 1812 (racontée par Chateaubriand et Tolstoi), il est fait prisonnier et sera maintenu en captivité pendant deux années sur les bords de la Volga à Saratov. Il y rédige un manuel de géométrie qui signe le renouveau de la géométrie projective (après Pascal et Desargues au XVII^e). Les notions et techniques qu'il y introduit sont à l'origine de la géométrie algébrique moderne développée au XIX^e par l'école française, représentée par Chasles par exemple, par l'école allemande de Pfaff, Mobius (qui introduit les coordonnées homogènes), puis à la fin du XIX^e et au XX^e par l'école italienne d'Enriques, Sévéri et Castelnuovo, avant de revenir en France (mais pas uniquement) avec Grothendieck.
Dans ce manuel intitulé <u>Traité des propriétés projectives des figures</u> il étudie les propriétés des figures invariantes par projection centrale (projection par un point). Le traité contient une approche projective des coniques, avec non seulement l'introduction de la droite à l'infini (en germe chez Desargues) mais aussi l'utilisation des points imaginaires (les foyers d'une ellipse sont les points d'intersection des tangentes issues des points "circulaires"), il contient encore le très controversé "principe de continuité" et les "transformations par polaires réciproques".
<u>Principe de continuité :</u> On pourrait l'énoncer comme cela : "*les propriétés d'une figure, invariantes par certaines transformations, ne sont pas modifiées lorsque la figure prend une position limite*". À l'aide de ce principe il

1. Robert Solé, dans <u>les savants de Bonaparte</u> relate l'expédition en Égypte en 1799 à laquelle Monge a participé

est amené à considérer des points et des droites rejetés à l'infini ou bien imaginaires. Il est ainsi le premier à travailler dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

- On passe de Pascal à Pappus : les deux droites sont vues comme situation limite de l'ellipse (plan passant par l'origine du cône). Le résultat reste vrai. Mais surtout,
- Points à l'infini : Les droites $y = tx$, $t \in \mathbb{R}$ coupent la parabole $y = x^2$ en deux points (éventuellement confondus) $(0, 0)$ et (t, t^2). Lorsque $t = \infty$ ie pour la droite $x = 0$ l'intersection consiste encore de deux points $(0, 0)$ et ∞,
- Points imaginaires : les cordes à un cercle deviennent tangentes puis coupent le cercle en deux points imaginaires. Par exemle, les droites $x = 0$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ rencontrent le cercle $x^2+y^2 = 1$ en deux points réels $(0, 1), (0, -1)$ pour la première, en un point réel (compté deux fois) $(1, 0)$ pour la deuxième et en deux points *imaginaires* $(\sqrt{2}, i)$ et $(\sqrt{2}, -i)$ pour la troisième.

Principe de dualité : Les théorèmes sur les points et les droites du plan engendrent par *dualité* de nouveaux théorèmes sur les points et les droites. Ainsi le théorème de Brianchon (condisciple et compagnon d'armes de Poncelet) est tout simplement le dual du théorème de Pascal, tandis que le théorème de Desargues est autodual. Il faut pardonner à Poncelet la teneur un peu

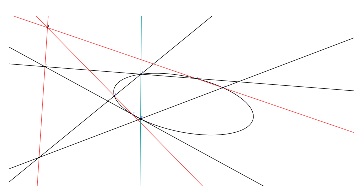

FIGURE 1 – 17-gone inscrit et circonscrit

vague de ces principes. C'est parce qu'ils sont vagues et généraux qu'ils ont fortement enrichi la géométrie ("tout ce qui est rigoureux est insignifiant" comme disait Thom). De plus il faut imaginer les conditions dans lesquelles ils ont été énoncés : "*Là, comme on le concevra facilement, il ne trouva ni*

secours matériels, ni ressources morales ou scientifiques, et lorsque, sous la bienfaisante influence du splendide soleil d'avril, il recouvra quelques forces et voulut se distraire par le travail de l'esprit, il dut refaire péniblement, et pour ainsi dire un à un, les éléments indsipensables aux études mathématiques, privé qu'il était de tout livre ..." [6].
Enfin ce manuel contient le célébre "Grand théorème de Poncelet" sur les polygones simultanément inscrits dans une conique C et circonscrits à une conique D. ce théorème d'énonce de la manière suivante :

Théorème 1.1. *Si C et D sont deux coniques planes telles qu'il existe un polygone à n côtés à la fois inscrit dans C et circonscrit à D, alors pour tout couple de points (A, B) sur C tel que la droite (AB) est tangente à D, il existe un polygone inscrit dans C et circonscrit à D dont A et B soient deux sommets consécutifs.*

Des formules étaient connues pour deux cercles inscrits et circonscrits à un triangle (formule de Chapple ou d'Euler), à un quadrilatère (Fuss) et quelques autres polygones. Ainsi pour le cas des triangles on a : deux cercles de rayon $r \leq R$, le petit inclus dans le grand et dont la distance au centre est d sont triangulairement reliés si et seulement si $R^2 - 2Rr - d^2 = 0$, sont quadrilatèrement reliés si et seulement si $\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}$. Ce théorème

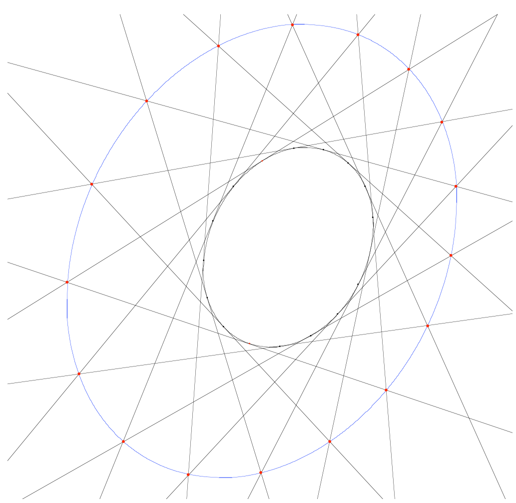

FIGURE 2 – 17-gone inscrit et circonscrit

a inspiré Jacobi (1828) qui en a donné une preuve à partir de courbes dites elliptiques (de degré 3 dans le plan), Cayley (1860) qui a donné les équations des hypersurfaces de l'espace des coniques qui sont n-circonscrites à

une conique donnée, généralisant ainsi les formules de Fuss et Euler, ou bien encore Griffiths en 1976.
La prison a été une période mathématiquement très riche pour Poncelet qui, après cette retraite imposée, n'a plus jamais réussi à se consacrer comme il l'aurait voulu aux mathématiques, continuellement occupé par ses activités d'ingénieur puis de directeur de l'école polythechnique. Il le dit à plusieurs reprises dans les préfaces des différentes éditions de son traité, comme dans le passage qui suit [6] *"Quand je dus abandonner cette ville renaissante,[...] je ne pus me défendre d'une émotion profonde et d'un vif sentiment d'appréhension, en me demandant si, au milieu de la vie active qui m'attendait, je pourrais poursuivre, comme dans le silence et la solitude de l'exil, les études qui en avaient adouci l'amertume et m'étaient par là devenues si chères."*
On touche ici au thème principal de cet exposé, à son fil rouge : l'occasion, offerte par l'isolement ou la captivité ou les deux, de se consacrer pleinement aux mathématiques. Dans d'autres disciplines de tels exemples doivent aussi exister (il y a Sade en littérature mais bon ...). On verra que ces extraits ont un pendant chez Weil et aussi chez Leray qui se comparait à Poncelet.

2 André Weil et Jean Leray

Un siècle est passé, puis une première guerre mondiale qui tua toute une génération de mathématiciens français. Nous sommes en 1922, André Weil a 16 ans et il entre à l'ENS. Il est le frère de la philosophe Simone Weil, morte à l'âge de 34 ans en 1943 à Londres, dont Albert Camus, après la lecture de son livre posthume intitulé L'Enracinement, dira qu'elle est "le plus grand esprit de notre temps". Souffrant certainement d'un complexe intellectuel par rapport à son génial frère ainé, Simone Weil raconte qu'elle songea à se suicider "*à cause de la médiocrité de [ses] facultés naturelles*". Tous les deux forment un couple mythique à l'instar de Blaise et Jacqueline Pascal (bon, ici je cède à la mode féministe).
L'apport fondamental d'André Weil aura été le rapprochement, via le formalisme algébrique des ideaux et des extensions de corps, de l'arithmétique et de la géométrie. Il est assez cocasse de lire ce que Simone Weil pense de l'algèbre et de l'algébrisation des mathématiques.
" *Argent, Machinisme, Algèbre. Les trois monstres de la civilisation actuelle. Analogie complète.*
– *Travail moderne :substitution du moyen à la fin.*
– *Algèbre moderne :substitution du signe au signifié.*
– *Machine : la méthode se trouve dans la chose, non dans l'esprit.*

– *Algèbre : la méthode se trouve dans les signes, non dans l'esprit.*"
Son rejet de l'algèbre provient plus profondément d'un rejet de la puissance, de la puissance d'un outil qui échappe à ses concepteurs. "*Ce qui a été une fois compris se reproduit une quantité illimitée de fois. On ne recommence pas à comprendre à chaque fois, parce que c'est inutile, que cela prend du temps, et d'autres raisons encore. Ces applications automatiques conduisent elles-mêmes à du nouveau ; alors on invente sans penser —c'est bien le pire. Dès lors la pensée elle-même — ou plutôt ce qui en tient lieu — devient un outil.*" ([5])

André Weil soutient sa thèse de doctorat en 1928 (sous la direction de Hadamard et Picard). Il obtient un résultat qui fit époque : il étend à toutes les courbes algébriques ($P(x, y) = 0$) un résultat de finitude (finitely generated) du nombre de solutions entières d'une équation diophantienne à deux variables [2]. Plus précisément il montre que les points de coordonnées rationnelles sur la courbe s'obtiennent par un nombre fini d'opérations "tangentes ou cordes généralisées" à partir d'un nombre fini de points rationnels de la courbe. Il généralise le théorème de Mordell qui concerne les courbes de genre 1, dites courbes elliptiques.
Il enseigne en Inde où il contribue à créer le département de mathématique de l'université d'Aligarh de 1930 à 1933. Lors de son séjoiur indien il lit dans le texte (il a appris le sanskrit pendant ses classes préparatoires) la grande fresque historico-myhtique le Bhagavadgita (poème épique extrait du Mahabharata). Ce texte est un des écrits fondamentaux de l'Hindouisme. Le Bhagavadgita est une source intellectuelle semble-t-il incontournable chez Weil. Il en cite souvent des passages, en propose des traductions etc... Weil correspond parfaitement (il en est le représentant par excellence) au mathématicien français de cette période, nourri aux oeuvres des auteurs latins, grecs et des auteurs du grand siècle français (le XVII^e !) (Descartes, Viète, la Cardinal de Retz). Ce fut différent avant avec Poincaré et différent après avec l'apparition, dans les années d'après guerre, des mathématiques dites appliquées.

En 1935 il fonde avec Henri Cartan (et Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt) le groupe Nicolas Bourbaki. Ce mathématicien collectif, natif

2. Un exemple d'équation diophantienne $x^n + y^n = 1$ qui provient de la conjecture de Fermat, ou $x^a - y^b = 1$, dont la seule solution pour $a \geq 2$ et $b \geq 2$ est $(a, b) = (2, 3)$ et $(x, y) = (\pm 3, 2)$ la conjecture ou théorème de Catalan démontré en 2002

de Poldévie sera l'auteur d'une série d'ouvrages qui vont transformer (pour un temps) les mathématiques mondiales en proposant une approche globalisante, généralisante et partant très formaliste des mathématiques (de leur rédaction). Les règles de Bourbaki ont été édictées par Weil et les autres fondateurs : départ à 50 ans, anonymat, organisation du séminaire Bourbaki qui se déroule encore trois à quatre fois par an à l'Institut Henri Poincaré.

En 1939 André Weil s'en va pour un long voyage dans le nord de l'Europe (Suede, Norvège, Finlande) visiter des amis afin d'échapper à la mobilisation générale qu'il devine imminente. Malheureusement la Russie entre en guerre contre la Finlande et il se fait arrêter et manque même de se faire fusiller comme espion : *"On trouva une lettre en russe, de Pontrjagin je crois ; [...] On trouva un paquet de cartes de visite au nom de Nicolas Bourbaki, membre de l'Académie Royale de Poldévie [...]* ([1]) Suite à l'intervention d'un ami mathématicien Finlandais il est expulsé et se retrouve en prison à Rouen pendant 3 mois avant d'être jugé et condamné à 5 ans d'emprisonnement pour insoumission. On lui offre la possibilité de se racheter en partant immédiatement sur le champ de bataille ; ce qu'il fait. La guerre prend fin avant qu'il ait combattu et il est démobilisé. Il quitte alors la France pour les États-Unis puis le Brésil où il travaille avec Zariski et encore les États-Unis (Princeton) où il finira sa carrière et son existence.
Pendant ses 3 mois de captivité il est très productif. Si au début ses amis le plaignent, après quelques semaines, le ton change et Cartan lui écrit [1] : "*Nous n'avons pas tous la chance de pouvoir comme toi travailler sans être dérangés*". Il y rédige le manuel destiné à Bourbaki sur l'intégration dans les groupes topologiques, ouvrage dans lequel il démontre l'existence et l'unicité d'une mesure sur un groupe localement compact invariante par les translations à gauche. Il a toujours cependant marqué sa prédilection pour la théorie des nombres et la géométrie algébrique. À la lecture des classiques, en particulier Viète et Fermat qui ont interprété Diophante il comprend que les questions de solutions entières concernent le genre des courbes correspondantes aux équations (par équivalence birationnelle des solutions) et non pas aux degrés des équations. En particulier il développe l'analogie entre corps de nombres $\mathbb{Q}(\eta)$ et corps de fonctions des courbes non singulières sur les corps finis, ces derniers étant des extensions finies du corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(X)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. Il formule ainsi "*l'hypothèse de Riemann*[3] *pour les courbes algébriques sur les corps finis" donnant la meilleure*

3. formulée en 1859 par Riemann ; elle affirme que les zéros non triviaux de la fonction zéta de riemann $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$ ont tous pour partie réelle 1/2.

majoration possible du nombre de solutions d'une équation polynomiale à deux variables sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ en fonction de q et du genre de la courbe donnée par cette équation.[...] En cherchant à étendre ses résultats [...] à un nombre quelconque de variables Weil émit une série de remarquables conjectures qui servirent de ferments et de guides précieux dans le développement de la géométrie algébrique des vingt années suivantes et qui ont finalement été démontrées [par] A. Grothendieck, M. Artin et P. Deligne. Il faut encore dire que ces conjectures sont intimement liés au théorème de Fermat-Wiles. Je vais essayer de vous les écrire [8]

Consjecture 2.1. *Soit X une variété projective non singulière de dimension supérieure à 1, soit n, sur $\mathbb{F}_q$ posons :*

$$Z(T) = \exp(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} N_n T^n),$$

où N_n est le nombre de points de X à coordonnées dans $\mathbb{F}_{q^n}$. Alors :

1. *La fonction $Z(T)$ est une fraction rationnelle de T, qui peut se mettre sous la forme :*

$$Z(T) = \frac{P_1(T)P_3(T) \cdots P_{2n-1}(T)}{P_0(T)P_2(T) \cdots P_{2n}(T)}$$

   où les P_i sont de dgré b_i et leur racines sont de module $q_i/2$;

2. *On a une "équation fonctionnelle" pour la fonction Z ;*
3. *Si X provient par réduction d'une variété projective complexe non sing. alors les b_i sont les i-ièmes nombres de Betti de X.*

Il a eu de nombreuses distinctions, en particulier le prix de Kyoto en 1994 dont la remise est narrée par sa fille Sylvie dans le livre très touchant intitulé "Chez les Weil" paru il y a quelques petites années.
Revenons à son séjour en prison. Tout comme Poncelet, mais dans un but clairement plus provocateur, André Weil écrit : "*j'ai trouvé des choses très intéressantes. J'en suis à souhaiter d'avoir encore quelques temps de tranquillité ici pour achever ce qui est en train, et je commence à croire que rien n'est plus favorable que la prison aux sciences abstraites*" et un peu plus loin "*Mes mathématiques marchent au delà de tout ce que j'espérais, et je suis même un peu inquiet, car si je ne travaille plus bien qu'en prison, faudra-t-il que je m'arrange pour y passer 2 ou 3 semaines chaque année ?*"
Après ce passage et malgré ses nombreuses tentatives André Weil n'obtint jamais de poste en France, ni à la Sorbonne ni au collège de France où il

avait postulé. Il fut bloqué par le "parti des patriotes" comme les appelle Cartier dans sa contribution au numéro de la gazette des mathématiques qui lui est consacrée ("André Weil : (1906-1998) : Adieu à un ami") : "*Mais le parti "patriote" ne désarmait pas contre lui ; Chevalley subit les contrecoups de la campagne anti-Weil [...] il n'était pas étonnant que les "oiseaux de basse altitude" se soient chagrinés du retour de deux aigles. Mais le plus acharné du parti patriote était Jean Leray, mathématicien éminent et justement respecté pour sa science. Il avait failli être des fondateurs de Bourbaki, il était proche de Cartan et de Weil. On sait qu'il eut à passer cinq ans dans un camp de prisonniers militaires ; il y fit ses magnifiques découvertes de topologie algébrique dans des conditions évidemment difficiles ; nous lui accorderons ces circonstances atténuantes ! [...] Leray s'employa efficacement à faire écarter Weil de la sorbonne et du collège de France. Weil resta à Chicago et ma génération y perdit un maître.*"

Je voudrais finir en disant quelques mots, malheureusement très rapides, de Jean Leray. Il est né et mort les mêmes années qu'André Weil. Il a lui aussi été normalien et il a remporté et partagé le prix Wolf en 1979 avec André Weil. Spécialisé en mécanique des fluides il se consacre à la topologie algébrique pendant sa captivité pour que ses compétences ne soient pas utilisées par les allemands. Il dirige dans le camp de prisonnier une université en captivité qui diplomera 500 élèves. Il rédige lors de ces 5 années de nombreux articles dans lesquels il introduit les notions de faisceaux, de suites spectrales motivé au départ par le désir d'étendre des résultats d'existence de points fixes. Citons l'extrait autobiographique qu'il écrivit en 1953 [10] : "*Resté seul à la tête de ma batterie, le capitaine et le second lieutenant ayant fui, je fus fait prisonnier le 24 juin en exécution de l'ordre de capitulation générale. Internés en Autriche, à l'oflag XVIIA, le 2 juillet 1940, soumis à une famine débilitante, privés de tout colis, de tout livre et de toute distraction, nous avons immédiatement fondé l'université de l'Oflag XVIIA ; au début de l'hiver notre situation s'améliorant et la vie du camps'organisant l'université entreprit la préparation à la licence et aux grands concours ; les 500 diplômes qu'elle a décernés en cinq ans sont actuellement validés ; ; ses élèves ont remporté les plus brillants succès à l'agrégation de droit et aux diverses agrégations de l'enseignement secondaire ; quelques-uns de ses professeurs ont pu faire des recherches personnelles, d'autres des ouvrages de vulgarisation ou des livres scolaires. Notre université s'honore d'avoir [...] fait enseigner nos collègues israelites en dépit des mesures racistes. La direction de cette Université m'a incombé. Je fus libéré par les alliés le 10 mai 1945*".

Références

[1] André Weil, *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhauser.

[2] André Weil, *Sur les origines de la géométrie algébrique*, Compositio Mathematica, 1981.

[3] Jean Dieudonné, *Weil André* Encyclopédia universalis.

[4] Jacques Meyer, *Poncelet Jean Victor* Encyclopédia universalis.

[5] Laurent Lafforgue, *Simone Weil et la mathématique*, conférence à la BNF, 23 octobre 2009.

[6] Jean-Victor Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi de fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, Gallica BNF, 1862.

[7] H.J.M. Bos, *The closure theorem of Poncelet*, Seminario Matematico e Fisico, 1984.

[8] Daniel Parrochia, Artibano Micali, Pierre Anglès, *L'unification des mathématiques*, Hermes Sciences, 2012.

[9] Numéro spécial de la Gazette consacré à André Weil

[10] Numéro spécial de la Gazette consacré à Jean Leray