EXAMEN FINAL : Algèbre linéaire (L2-MIASHS)
Université de Pau et des Pays de l'Adour
mai 2016, durée : 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Donner une base orthonormée de vecteurs propres de A.

CORRECTION : 1. $P_A(x) = -(x-2)(x-4)^2$.
2. La dimension du sous espace propre E_4 associé à la valeur propre 4 est égale à $3 - \mathrm{rg}(A-4I)$. Or il est facile de voir que $\mathrm{rg}(A-4I) = 1$. Donc la dimension de E_4 est égale à la multiplicité de la valeur propre ce qui prouve que A est diagonalisable. La matrice diagonale D est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminons une base de vecteurs propres. Un vecteur propre associé à 2 est $u = (1, -2, 1)$. Deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à 4 sont $v = (0, 1, 0)$ et $w = (1, 0, -1)$. On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui donne $P^{-1}AP = D$. Il n'existe pas de base orthonormée car E_2 et E_4 ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz.$$

1. Donner la forme bilinéaire, f_q, associée à q ainsi que sa matrice M dans la base canonique;
2. donner le rang et la signature de q;
3. donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui soit orthogonale pour q;
4. donner une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP = P^TMP = D$ où D est une matrice diagonale.

CORRECTION : 1. On a $f_q((x,y,z),(x',y',z') = 2xx' + yy' + zz' + xy' + x'y + xz' + x'z$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $q(x, y, z) = (x+y)^2 + (x+z)^2$. Le rang est 2, la signature $(2, 0)$.
3. Pour trouver la matrice de passage. On inverse le système :

$$x' = x + y, y' = y, z' = x + z.$$

Ce qui donne
$$x = x^{'} - y^{'}, y = y^{'}, z = -x^{'} + y^{'} + z^{'}.$$
La matrice est donc
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Il faut diagonaliser puis orthonormer une base de vecteurs propres. Le polynôme caractéristique est $P_M(x) = -x(x-3)(x-1)$. Un vecteur propre associé à 0 est $u = (-1, 1, 1)$, un vecteur propre associé à 1 est $(0, 1, -1)$ et un vecteur propre associé à 3 est $(2, 1, 1)$. Ils sont déjà orthogonaux deux à deux car associés à des valeurs propres distinctes. Il suffit donc de les normer pour trouver la matrice de passage P vérifiant $P^t M P = P^{-1} M P = D$. On obtient donc
$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est la matrice d'une rotation;
2. donner un vecteur directeur de son axe, son angle $\theta \in [0, 2\pi[$ et une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

CORRECTION : 1.$A^t A = I$ et $\det(A) = 1$. C'est donc une rotation.
2. Son axe e est vecteur propre associé à la valeur propre égale à 1. On trouve $e = (1, 1, -1)^T$. Pour déterminer son angle $\theta \in [0, 2\pi[$ on sait tout d'abord que $\mathrm{Tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos(\theta)$. De ceci on déduit $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ soit $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$ selon le signe du sinus. Or on a vu en cours que signe$(\sin(\theta))$ = signe$(\det(e, \imath, A(\imath)))$ où $\imath$ aurait pu être remplacé par n'importe quel vecteur non colinéaire à e. Ce déterminant vaut 1 donc le sinus est positif et donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
Une base dans laquelle la rotation s'écrit sous la forme demandée est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ où $e_1 = \frac{e}{\|e\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^T$, e_2 est un vecteur de norme égale à 1 orthogonal à e_1, par exemple $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$ et $e_1 \wedge e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T$.