Complexes inattendus de droites de saut

Jean Vallès

November 15, 2021

Abstract

Unexpected complex of jumping lines

We prove here the following results :

Theorem 1 *Let E a rank 2 vector bundle over $\mathbf{P}_3$, if C is a reduced irreducible curve of $\mathbf{P}_3^\vee$ such that E_H is unstable for all $H \in C$ then C is a line.*

We define now the set $W(E)$ as the set of planes H such that the restricted bundle E_H is unstable (that means non semi-stable).

Theorem 2 *Let E a rank 2 vector bundle over $\mathbf{P}_3$, with first chern class $c_1 = c_1(E)$, L a line and an integer $n \geq 0$. The following conditions are equivalent :*

(i) *$L^\vee \subset W(E)$ and $H^0(E_H(-n+[-c_1/2])) \neq 0$ for a general point $H \in L^\vee$.*

(ii) *There exist $m > 0$ and a section $t \in H^0(E(m+[-c_1/2]))$ such that the zero variety of t contains the infinitesimal neighbourhood of order $(m+n-1)$ of L.*

1 Introduction.

Soit E un fibré stable de rang 2 de première classe de chern $c_1 \leq -3$. Les droites L telles que $H^0(E_L) \neq 0$ forment un sous schéma de la grassmanienne des droites de $\mathbf{P}_3$ dont la codimension attendue est au moins 2 (cf. [G-P2]). Pourtant on connait de nombreux exemples de fibrés pour lesquels ce sous schéma est un complexe (voir exemple 1.2).
Dans [G-P] Gruson et Peskine annoncent le résultat suivant :

Lemme B.5 : *Soit E un fibré de rang 2 sur $\mathbf{P}_3$ tel que $c_1(E) \leq -3$ et $H^0(E) = 0$. Si K est un complexe réduit irréductible de droites tel que $H^0(E_L) \neq 0$ pour $L \in K$, il existe une courbe réduite irréductible Γ de $\mathbf{P}_3$ telle que les droites de K sont les droites rencontrant Γ. De plus il existe un entier l et une section s de $E(l)$ dont la variété des zéros contient le $(l-1)$-ième voisinage infinitésimal de Γ.*

Les auteurs me signalent que la preuve est incomplète. Plus précisément la démonstration de l'irréductibilité géométrique de K au dessus de $\mathbf{P}_3$ sur laquelle cette preuve repose comporte une erreur.

Nous donnons ici une démonstration de cet énoncé dans le cas où le complexe K est formé des droites d'une famille de dimension 1 de plans. Cela peut paraitre surprenant car une telle famille est toujours géométriquement réductible excepté dans le cas où elle est formée des plans contenant une droite. C'est bien entendu le seul cas possible. En effet, considérons la courbe C de $\mathbf{P}_3^\vee$ naturellement associée au complexe K (voir lemme 1), on montre :

Théorème 1 *Soit E un fibré stable de rang 2 sur $\mathbf{P}_3$, si C est une courbe réduite irréductible de $\mathbf{P}_3^\vee$ telle que E_H est instable pour tout $H \in C$ alors C est une droite.*

Remarque. On déduit immédiatement de ce théorème que l'ensemble des hyperplans H tels que E_H est instable (c'est à dire non semi-stable) noté $W(E)$ est de dimension au plus 1 dans $\mathbf{P}_3^\vee$ (ce résultat est déjà prouvé par Coanda [Co]).

De plus, on a l'énoncé suivant, directement inspiré du lemme B.5 :

Théorème 2 *Soit E un fibré stable de rang 2 sur $\mathbf{P}_3$ de première classe de chern $c_1 = c_1(E)$, L une droite et n un entier ≥ 0. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$L^\vee \subset W(E)$ et $H^0(E_H(-n+[-c_1/2])) \neq 0$ pour H un point général de $L^\vee$.*

(ii) *Il existe $m > 0$ et une section $t \in H^0(E(m+[-c_1/2]))$ dont la variété des zéros contient le $(m+n-1)$-ième voisinage infinitésimal de L.*

1.1 Remarques préliminaires.

Rappelons qu'un fibré E de rang deux sur $\mathbf{P}_3$ est stable si et seulement si $H^0(E([-c_1/2])) = 0$, où [.] désigne la partie entière et c_1 la première classe de chern de E.
On supposera dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 que $c_1 = 0$ ou -1.

Remarque 1. Les théorèmes 1 et 2 impliquent le lemme B.5 lorsque le complexe K est formé des droites d'une famille de dimension 1 de plans (voir lemme 1).
Remarque 2. Les théorèmes 1 et 2 sont vrais sur $\mathbf{P}_n$, $n \geq 3$.
Remarque 3. Le lemme B.5 est évident lorsque E n'est pas stable.

Démontrons la remarque 3 pour $c_1(N) = -3$. Dans ce cas $H^0(N(1)) \neq 0$ et l'unique section non nulle de $N(1)$ s'annule le long d'une courbe Z :

$$0 \to O_{\mathbf{P}_3}(-1) \to N \to \mathcal{I}_Z(-2) \to 0.$$

On en déduit que $L \in K$ si et seulement si $L \cap Z \neq \emptyset$. Le complexe K étant réduit irréductible, ceci prouve l'existence d'une courbe réduite irréductible Γ telle que $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{I}_\Gamma$.

Le lemme suivant établit la correspondance entre le complexe K de droites de saut d'un fibré E, complexe formé des droites d'une famille de dimension 1 de plans, et la courbe C de $W(E)$.

Lemme 1 *Soit N un fibré de rang 2 stable tel que $c_1(N) \leq -2$, on a l'équivalence :*

$$H^0(N_L) \neq 0, \text{ pour tout } L \subset H \Longleftrightarrow H^0(N_H) \neq 0.$$

démonstration : L'implication ($\Leftarrow$) résulte de la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow N_H(-1) \longrightarrow N_H \longrightarrow N_L \longrightarrow 0.$$

Inversement, d'après Grauert-Mulich le fibré N_H est instable. Si $H^0(N_H) = 0$, on peut donc supposer que $H^0(N_H(1)) \neq 0$, soit,

$$0 \longrightarrow O_H(-1) \longrightarrow N_H \longrightarrow \mathcal{I}_{Z_H}(c_1 + 1) \longrightarrow 0,$$

où Z_H est un groupe de points de H. On en déduit que pour une droite générale L de H, $H^0(N_L) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Remerciements : Je remercie Christian Peskine qui a dirigé ce travail et Iustin Coanda pour ses conseils et les nombreuses et utiles discussions que nous avons eues.

1.2 Exemple.

Avant de démontrer les théorèmes 1 et 2 donnons un exemple de fibré $\mathcal{E}$ possèdant une famille de dimension 1 de plans instables et décrivons une section de ce fibré ayant les propriétés annoncées dans le théorème 2.

Exemple. On reprend l'exemple de Gruson-Peskine décrit par Mei-Chu Chang [Ch]: Soient $(r+1)$ plans $H_1, ..., H_{r+1}\,(r \geq 2)$ articulés autour d'une droite D, et dans chaque plan H_i une courbe X_i de degré $(2r-1)$; les $(r+1)$ courbes sont choisies 2 à 2 disjointes. On note:

$$X = \bigcup_{i=1}^{(r+1)} X_i \quad \text{où} \quad X_i \subset H_i.$$

Il existe un fibré $\mathcal{E}$ stable de rang 2 tel que $c_1(\mathcal{E}) = 0$ et une extension

$$0 \longrightarrow O_{\mathbf{P}_3} \longrightarrow \mathcal{E}(r) \longrightarrow \mathcal{I}_X(2r) \longrightarrow 0. \tag{1}$$

En effet comme $w_X = O_X(2r-4)$, on a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_X, w_{\mathbf{P}_3}(4-2r)) \neq 0$, et $\mathcal{E}$ est stable car $H^0(\mathcal{I}_X(r)) = 0$.
Soit H un plan général contenant D, alors H coupe proprement X, et (1) reste exacte après tensorisation par $O_H(1-2r)$

$$0 \longrightarrow O_H(1-2r) \longrightarrow \mathcal{E}_H(1-r) \longrightarrow \mathcal{I}_{X\cap H}(1) \longrightarrow 0.$$

Comme $X \cap H \subset D$ on a $H^0(\mathcal{I}_{X\cap H}(1)) \neq 0$, donc $H^0(\mathcal{E}_H(1-r)) \neq 0$ (on remarque de plus que $H^0(\mathcal{E}_H(-r)) = 0$ pour tout plan H). Nous avons montré que $D^\vee$ est une droite de $\mathbf{P}_3^\vee$ dont les points correspondent à des plans instables du fibré $\mathcal{E}$.

Décrivons maintenant une section de ce fibré ayant les propriétés annoncées. La suite exacte (1) montre que $H^0(\mathcal{I}_X(r+1)) \simeq H^0(\mathcal{E}(1))$. La courbe X est contenue dans la réunion de $(r+1)$ plans. Cette surface induit une section non nulle t de $\mathcal{E}(1)$. On note Γ le lieu des zéros de la section t (c'est une courbe car $H^0(\mathcal{E}) = 0$).
Montrons que Γ contient le $(r-1)$-ième voisinage infinitésimal de D. Sinon soit H un plan contenant D et coupant proprement Γ. Dans ce cas la section $t_H \in H^0(\mathcal{E}_H(1))$ s'annule en codimension 2 le long du groupe de points $\Gamma \cap H$

$$0 \longrightarrow O_H \longrightarrow \mathcal{E}_H(1) \longrightarrow \mathcal{I}_{\Gamma\cap H}(2) \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Il en résulte que $H^0(\mathcal{E}_H(-1)) = 0$, ce qui contredit $H \in W(\mathcal{E})$. Donc la section t_H s'annule le long d'une courbe (d'équation $f_H = 0$) contenant D et éventuellement d'un groupe de points. Si le degré de cette courbe est $k \leq (r-1)$, la section $t_H/f_H \in H^0(\mathcal{E}_H(1-k))$ s'annule en codimension 2, et on trouve $H^0(\mathcal{E}_H(-k)) = 0$. C'est impossible car $H^0(\mathcal{E}_H(1-r)) \neq 0$.
Par conséquent la restriction de Γ à un plan général contenant D est une courbe plane de degré r. On en déduit que Γ contient le $(r-1)$-ième voisinage infinitésimal de D.

Montrons de plus que le support de Γ est contenu dans D. En effet supposons que Γ possède une autre composante irréductible Γ_1. Soit H le plan contenant Γ_1 et L. Le lieu des zéros de la section $t_H \in H^0(\mathcal{E}_H(1))$ contient une courbe de degré $\geq (r+1)$. Alors $H^0(\mathcal{E}_H(-r)) \neq 0$, ce qui est impossible.

Le lieu des zéros de la section $t \in H^0(\mathcal{E}(1))$ est une courbe Γ telle que :

- $\deg(\Gamma) = r^2 + r$ et $p_a(\Gamma) = 1 - r^2 - r$ (où p_a est le genre arithmétique).
- Γ contient le $(r-1)$-ième voisinage infinitésimal de D.
- Le support de Γ est inclus dans D.

2 Démonstration du théorème 1

La démonstration est divisée en deux étapes. On vérifie tout d'abord que C est plane. On démontre ensuite que c'est une droite en interprétant la singularité apparaissant au point correspondant au plan de $\mathbf{P}_3^\vee$ contenant la courbe.
D'après le théorème de semi continuité la fonction $h^0(E_H(-k))$ est minimale sur un ouvert non vide U de C. Soit $n \geq 0$ tel que $h^0(E_H(-n)) = 1$ pour un point $H \in U$ (remarquons que $n \geq 1$ lorsque $c_1(E) = 0$).

Etape 1 : La démonstration de cette première partie repose essentiellement sur la remarque bien connue suivante que nous ne redémontrons pas.

Remarque 1. Soit H un plan général de C et s_H l'unique section non nulle de $H^0(E_H(-n))$. On note $Z(s_H)$ le schéma des zéros de s_H, si L est une droite de H on a :

$$\deg(O_{L\cap Z(s_H)}) \geq r \Longleftrightarrow H^0(E_L(-n-r)) \neq 0.$$

On suppose que C n'est pas plane, i.e. la famille de plans correspondant aux points de C ne possède pas de point fixe. Soit H_i et H_j deux points généraux de U. Comme $Z(s_{H_i}) \cap Z(s_{H_j}) = \emptyset$, on a d'après la remarque 1, $h^0(E_{H_i \cap H_j}(-n)) = 1$. Par conséquent les sections $s_{H_i} \in H^0(E_{H_i}(-n))$ et $s_{H_j} \in H^0(E_{H_j}(-n))$ uniques à une constante près coincident sur $H_i \cap H_j$ i.e. $s_{H_i}(x) = \lambda s_{H_j}(x)$ pour $x \in H_i \cap H_j$ et $\lambda \in \mathbf{C}$.

Soit $\mathbf{F} \subset \mathbf{P}_3 \times \mathbf{P}_3^\vee$ la variété d'incidence points-plans de $\mathbf{P}_3$. Posons $X := \mathbf{F} \cap (\mathbf{P}_3 \times C)$ et considérons les projections : $X \xrightarrow{p} \mathbf{P}_3$ et $X \xrightarrow{q} C$. Les fibres de X au dessus de C sont des $\mathbf{P}_2$, et au dessus de $\mathbf{P}_3$ elles correspondent aux sections hyperplanes de C. On a :

$$h^0(p^*E(-n)_{|q^{-1}(H)}) = h^0(E_H(-n)) = 1 \quad \text{pour tout } H \in U.$$

Le faisceau $q_*p^*E(-n)$ est cohérent de rang 1 sur C sans torsion donc inversible. Le morphisme canonique $q^*q_*p^*E(-n) \to p^*E(-n)$ s'annule le long d'un sous schéma fermé Z de X de codimension ≥ 2. Il induit un morphisme composé ϕ au dessus de $\mathbf{P}_3$:

$$\begin{array}{ccc} X \setminus Z & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{P}_{\mathbf{P}_3}(E) \\ & p \searrow \quad \swarrow \pi & \\ & \mathbf{P}_3 & \end{array}$$

L'image de ϕ est un ouvert dans un diviseur réduit irréductible D de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_3}(E)$. Le diviseur D correspond à une section $t \in H^0(S_kE(m))$ (où $S_kE(m)$ est la k-ième puissance symétrique de E). La fibre générale $p^{-1}(x)$ de $X \setminus Z$ au dessus de $\mathbf{P}_3$ consiste en $d = \deg C$ points $(x, H_1), ..., (x, H_d)$. L'image de (x, H_i) par ϕ est donnée par le point $s_{H_i}(x)$ de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_3}(E_x)$ où s_{H_i} est l'unique section non nulle de E_{H_i}. Il résulte de la remarque 1 que les points $(x, H_1), ..., (x, H_d)$ s'envoient sur le même point de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_3}(E_x)$.

On en déduit que la fibre générale de D au dessus de $\mathbf{P}_3$ est irréductible et qu'elle consiste en un point simple par lissité générique. Le diviseur D est donc birationnel à $\mathbf{P}_3$. Il en résulte que t est une section de $E(m)$ avec $m > 0$ car E est stable. Quitte à enlever la composante de codimension 1, on peut supposer que t s'annule en codimension 2 le long d'une courbe Γ.

Les sections $s_H \in H^0(E_H(-n))$ et $t_H \in H^0(E_H(m))$ sont proportionnelles. Par hypothèse $H^0(E_H(-n-1)) = 0$, la section s_H s'annule alors en codimension ≥ 2. Il existe $f_H \in H^0(O_H(m+1))$ tel que $t_H = f_H s_H$. Mais pour un plan général H, t_H s'annule aussi en codimension 2 (car la courbe C ne possède pas de point fixe), ce qui est impossible car $m > 0$.

Etape 2: Soit X le plan de $\mathbf{P}_3^\vee$ contenant la courbe C, et $x \in \mathbf{P}_3$ le point correspondant à X. On considère l'éclatement $\widetilde{\mathbf{P}}_3$ de $\mathbf{P}_3$ en x et les morphismes naturels $p : \widetilde{\mathbf{P}}_3 \to \mathbf{P}_3$ et $q : \widetilde{\mathbf{P}}_3 \to \mathbf{P}_2$. On a $\widetilde{\mathbf{P}}_3 = \mathrm{Proj}_{\mathbf{P}_3}(\bigoplus_i \mathcal{M}_x^i)$ et $\widetilde{\mathbf{P}}_3 = \mathbf{P}_{\mathbf{P}_2}(O_{\mathbf{P}_2}(1) \oplus O_{\mathbf{P}_2})$.
On appelle Δ le diviseur exceptionnel, le morphisme $q_{|\Delta} : \Delta \to \mathbf{P}_2$ est un isomorphisme. De plus si l est un point de $\mathbf{P}_2$ on a :

$$(p^*E)_{|q^{-1}(l)} \simeq E_L.$$

Le morphisme q étant plat, le théorème de semi-continuité implique que $h^0((p^*E)_{|q^{-1}(l)})$ atteint son minimum sur un ouvert non vide U de $\mathbf{P}_2$. Alors il existe $a \geq (n+1)$ tel que $h^0((p^*E)_{|q^{-1}(l)}(-a)) = h^0(E_L(-a)) = 1$ pour $l \in U$. L'entier a est $\geq (n+1)$ d'après la remarque 1. Le faisceau $q_*p^*E(-a)$ est un faisceau cohérent de rang 1, il est réflexif donc inversible sur $\mathbf{P}_2$. Soit k tel que $q_*p^*E(-a) = O_{\mathbf{P}_2}(-k)$. On considère le morphisme canonique:

$$\widetilde{s} : q^*O_{\mathbf{P}_2}(-k) = q^*q_*p^*E(-a) \longrightarrow p^*E(-a).$$

Il est injectif. En effet pour $l \in U$, $p^*E(-a)_{|q^{-1}(l)} \simeq O_L \bigoplus O_L(-a+c_1)$. D'après le théorème de changement de base, la restriction de $\widetilde{s}$ à la fibre de l est en fait le morphisme d'évaluation (de l'unique section non nulle de $E_L(-a)$) qui ne s'annule pas,

$$\widetilde{s}_{|q^{-1}(l)} : H^0(E_L(-a)) \otimes O_L \longrightarrow E_L(-a).$$

Le lieu des zéros du morphisme $\widetilde{s}$ est alors contenu dans la réunion des fibres $q^{-1}(l)$ où L est une droite dont l'ordre de saut est $> a$. On sait (cf lemme 9, [Ba]) que ce lieu des zéros ne contient pas d'hypersurface, c'est à dire qu'il ne contient au plus qu'un nombre fini de fibres.

Le morphisme $\widetilde{s}$ induit donc une section non nulle $\widetilde{t}$ de $p^*E(-a) \otimes q^*O_{\mathbf{P}_2}(k)$ qui s'annule le long d'une courbe de $\widetilde{\mathbf{P}}_3$. On remarque que $H^0(E(-a)) = 0$ implique $k > 0$.
Comme $p_*q^*O_{\mathbf{P}_2}(k) \simeq \mathcal{M}_x^k(k)$, l'image directe sur $\mathbf{P}_3$ de la section $\widetilde{t}$ est une section non nulle $t \in H^0(E(-a) \otimes \mathcal{M}_x^k(k))$, ce qui démontre $k > a$. La section t induit une suite exacte:

$$0 \longrightarrow O_{\mathbf{P}_3} \xrightarrow{t} E(k-a) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(2k-2a+c_1) \longrightarrow 0$$

où Γ est une courbe qui contient le $(k-1)$-ième voisinage infinitésimal de x, i.e $\mathcal{I}_\Gamma \subset \mathcal{M}_x^k$.
Soient H un point général de C, t_H la restriction de t au plan H et s_H l'unique section non nulle de $E_H(-n)$. On considère le morphisme de fibrés sur H suivant:

$$O_H(n) \oplus O_H(a-k) \overset{(s_H,t_H)}{\longrightarrow} E_H.$$

Le déterminant de ce morphisme est une section de $\mathcal{M}_{x,H}^k(c_1+k-a-n)$. Etant donné que $(c_1+k-a-n) < k$ cette section est nulle i.e $s_H \wedge t_H \equiv 0$
Le lieu des zéros de la section s_H étant de codimension deux, on en déduit qu'il existe

$$f_H \in H^0(O_H(k-a+n)) \;/\; t_H = f_H s_H.$$

Ceci montre que la courbe du plan H d'equation $f_H = 0$ est contenue dans Γ. En conséquence tout plan de C contient une composante irréductible de Γ. Il est clair que Γ contient une droite L telle que $C = L^\vee$.

3 Démonstration du théorème 2

(ii) $\Rightarrow$ (i) On note $t_H \in H^0(E_H(m))$ la restriction de t à un plan général H contenant L. Par hypothèse $\mathcal{I}_\Gamma.O_H \subset \mathcal{I}_{L,H}^{(m+n)} \simeq O_H(-m-n)$. En d'autres termes, la variété des zéros de t_H contient une hypersurface (d'équation $f_H = 0$) de degré $(m+n)$. Alors t_H/f_H est une section non nulle de $H^0(E_H(-n))$.

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** Dans le cas présent, le complexe de droites associé à $L^\vee$ (droites rencontrant L) est géométriquement irréductible. Nous reprenons donc les idées de la démonstration du lemme B.5 pour établir le résultat.

On reprend la construction de l'étape 1 (théorème 1). Considérons la variété d'incidence points-plans $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}_3$. Posons $X := \mathbf{F} \cap (\mathbf{P}_3 \times L^\vee)$ et considérons les projections : $X \xrightarrow{p} \mathbf{P}_3$ et $X \xrightarrow{q} L^\vee$. Comme précédemment on a un morphisme composé ϕ au dessus de $\mathbf{P}_3$:

$$X \setminus Z \xrightarrow{\phi} \mathbf{P}_{\mathbf{P}_3}(E),$$

et l'image de $X \setminus Z$ est un diviseur D de $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_3}(E)$. Le complexe étant géométriquement irréductible D est birationnel à $\mathbf{P}_3$. Il en résulte que D correspond à une section t de $E(m)$ avec $m > 0$ car E est stable. La section t s'annule le long d'une courbe Γ.

Soit $H \supset L$, les sections $s_H \in H^0(E_H(-n))$ et $t_H \in H^0(E_H(m))$ sont proportionnelles. Par hypothèse $H^0(E_H(-n-1)) = 0$, la section s_H s'annule alors en codimension ≥ 2. On en déduit qu'il existe $f_H \in H^0(O_H(m+n))$ telle que $t_H = f_H s_H$.

Ceci montre que la courbe du plan H d'équation $f_H = 0$ est contenue dans Γ. Par conséquent tout plan H de $L^\vee$ contient une composante irréductible de Γ de degré $(m+n)$. Il est clair que la courbe Γ contient le $(m+n-1)$-ième voisinage infinitésimal de L.

References

[Ba] Barth, W., Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}_n$, Math. Ann.**226** (1977), 125-150.

[Ch] Chang, M.C., A bound on the order of jumping lines, Math. Ann. **262** (1983), 511-516.

[Co] Coanda, I., On Barth's restriction theorem, J.reine angew.Math. **428** (1992), 97-110.

[G-P] Gruson, L., Peskine, C., Space Curves: Complete series and speciality, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1266** (1985), 108-123.

[G-P2] Gruson, L., Peskine, C., Courbes de l'espace projectif, variétés de sécantes, Enumerative geometry, Progress in Math. **24** (1982).