UNIVERSITE DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

# Quelques contributions à la classification des fibrés vectoriels sur les espaces projectifs complexes

Jean Vallès

Laboratoire de mathématiques et de leurs applications, UMR 5142
Université de Pau et des Pays de l'Adour

Rapport de synthèse en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches en mathématiques. 4 Juin 2010

Membres du jury :

Enrique ARRONDO (rapporteur)
Jacky CRESSON
Igor DOLGACHEV (rapporteur)
Laurent GRUSON (rapporteur)
Giorgio OTTAVIANI (rapporteur)
Christian PESKINE
Cristoph SORGER

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Simone Weil et son professeur, le philosophe Alain, partagent un sentiment de rejet vis à vis de la puissance. Pour cette raison l'algèbre, dont les énoncés échappent par leur généralité à ceux qui les formulent et dépassent le champ pour lequel ils ont été créés, est souvent incriminée dans leurs écrits. C'est aussi cette capacité intrinsèque de dépasser son champ naturel qui fait tout l'attrait de l'algèbre. L'étude de la géométrie algébrique nous amène parfois à penser avec Simone Weil ([64]) que " le rapport de signe a signifié périt ; le jeu des échanges entre signes se multiplie par lui-même et pour lui-même. Et la complication croissante exige des signes de signes." Dans ces moments il faut revenir au "signifié" c'est-à-dire la géométrie et ses variétés classiques, et reconnaître avec Alain ([1]) que "c'est la géométrie qui sauve l'algèbre".

Je n'oserais pas penser que l'une ou l'autre des deux branches, si bien enlacées, ait besoin d'être sauvée mais au fil des mois et des lectures je me suis convaincu que la théorie la plus abstraite repose sur un exemple ou un contre-exemple particuliers qui eux-mêmes sont encore à l'origine d'autres abstractions généralisantes.

Ce mémoire se voudrait une illustration de cette dichotomie. Il débute par une présentation de quelques variétés algébriques et résultats géométriques classiques puis viennent les fibrés vectoriels et l'algèbre linéaire sous-jacente et enfin le mémoire s'achève par le "sauvetage" concrétisé par les variétés de saut et autres restrictions de ces fibrés aux sous-variétés de l'espace. Dans ce cadre ternaire je présente quelques résultats que j'ai obtenu au fil des années écoulées. Cette présentation n'est pas exhaustive et contient même des résultats non publiés.

Par aileurs, l'objectif de ce va et vient entre géométrie classique et fibrés vectoriels est de démontrer des résultats de géométrie élémentaire avec le langage moderne des fibrés vectoriels mais aussi de démontrer des résultats sur les fibrés en utilisant des théorèmes de géométrie élémentaire. En guise d'illustration nous associerons par exemple :

1. Revêtement du plan et fibrés vectoriels.

Schwarzenberger a montré que tout fibré vectoriel de rang deux sur le plan est l'image directe d'un faisceau inversible sur une surface revêtant doublement le plan ([58], thm. 3). Dans le cas des fibrés de Schwarzenberger cette surface est isomorphe au Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ ; la courbe de ramification est une conique lisse et les fibrés obtenus sur le plan correspondent au choix d'un diviseur sur cette conique. Lorsque la courbe de ramification est une quartique lisse les images directes des faisceaux inversibles n'étaient pas connus ni étudiés. C'est ce que j'ai fait dans l'article [V9] où je montre par ailleurs que les droites de saut des fibrés de première classe de Chern impaire sont bitangentes à la quartique de ramification.

2. Variétés de sécantes de courbes rationnelles et fibrés de Schwarzenberger.

On remarquera dans la partie intitulée *Fibrés de Schwarzenberger* que ces derniers sont obtenus en éclatant la variété des $r$-plans $(r+1)$-sécants à une courbe rationnelle normale $C_n$ de degré $n$ le long du lieu des $(r-1)$-plans $r$-sécants à $C_n$.

3. Variétés de Poncelet et déterminant de sections globales d'un fibré donné.

Ces fibrés de Schwarzenberger correspondent au choix d'une courbe rationnelle normale et d'un diviseur sur cette courbe. Une section s'annulle sur les sommets d'une configuration d'hyperplans osculateurs (de droites tangentes à une conique pour ceux de rang deux), un pinceau définit une courbe et plus généralement un système linéaire de sections définit une variété dite de Poncelet ([63], page 59). Ce lien entre variétés de Poncelet et fibrés de Schwarzenberger permet de donner deux nouvelles preuves du théorème de Darboux et du grand théorème de Poncelet (thms. 4.3.6 et 4.3.4 dans la section 4.3).

4. Coniques Poncelet associées (polygones de Poncelet) et coniques de saut.

En utilisant la correspondance entre coniques de saut et coniques de Poncelet j'explique ce qu'est une conique singulière $n$ circonscrite à $C$ ([V6], thm. 2.2). Ce dernier point repose sur un lemme, relevant à la fois de la géométrie projective classique et de l'algèbre linéaire, qui associe aux deux droites de la conique singulière considérée, deux involutions de Frégier (dont les centres sont les points polaires des droites). Les deux droites forment une conique $2n$-circonscrite si et seulement si le produit des deux involutions est d'ordre $n$ ([V6], lemme 2.3).

5. Arrangements d'hyperplans et fibrés logarithmiques.

Les arrangements d'hyperplans sont étudiés par des mathématiciens de différents domaines, des topologues, des géomètres, des combinatoriciens, etc. Les uns s'intéressent plutôt au groupe fondamental du complémentaire, les autres aux fibrés vectoriels que l'on peut leur associer, tandis que tout se réduit peut-être à la combinatoire de l'arrangement (c'est la conjecture de Terao, voir [59], conj. 5.1). Dans ce texte, plus précisément dans la partie intitulée *fibrés logarithmiques*, on considère le cas des arrangements génériques (les hyperplans sont en position linéaire générale) et les fibrés associés. On dira un mot d'une généralisation possible de ces fibrés sur le plan conduisant à des arrangements de droites non génériques (thm. 3.3.2).

6. Variétés discriminants et droites de saut des fibrés logarithmiques.

À un groupe de 7 points (en position linéaire générale) du plan projectif, on peut associer la courbe des points doubles des cubiques singulières du réseau de cubiques passant par ces 7 points (il s'agit d'une sextique). On leur associe aussi un fibré logarithmique. Comme l'ont prouvé Dolgachev et Kapranov cette courbe est la courbe de saut du fibré logarithmique. Autrement dit le réseau intersecte la variété discriminant des cubiques singulières le long d'une courbe qui est birationnelle à la courbe de saut du fibré logarithmique. Pour 8 points la droite des cubiques rencontre la variété discriminant le long de 12 points. Ces points correspondent à 12 droites de saut du fibré logarithmique qui s'ajoutent aux 8 droites duales des points de départ. Ce phénomène se généralise pour tout nombre $n \geq 7$, c'est le théorème 4.2.2.

Après un rappel du grand théorème de Poncelet ainsi que du contexte historique pendant lequel il fut écrit, le texte commence par l'étude des produits d'involutions de SL(2) et de leurs réalisations géométriques. J'ai cherché à rester le plus élémentaire possible afin que ce début soit lisible par tout mathématicien quel que soit son domaine de prédilection, quitte à introduire du formalisme dans les parties qui suivront. J'espère que bien qu'élémentaire le théorème 2.1.6 soit nouveau mais je ne le garantis pas ; en effet il n'est jamais aisé de s'assurer qu'un énoncé concernant les problèmes de porisme de Poncelet est ou n'est pas déjà démontré par Darboux, Halphen voire Poncelet lui-même. D'autant plus que ces problèmes, grâce à leur incontestable élégance, reviennent de façon récurrente dans la littérature et dans des branches très diverses des mathématiques ([6], [7], [57], [39], [28], [34]).

En septembre 2001 nous donnions avec Giorgio Ottaviani une semaine de cours à l'école d'été organisée par Szurek et Wisnievsky à Wykno ([1]). Le titre global de cette série de cours était : *Moduli of vector bundles and group action.* Ces notes rédigées depuis des années attendent un effort supplémentaire pour se transfomer en livre mais — mea culpa — finir s'avère beaucoup plus difficile que commencer (ce pourrait être une définition du travail, le travail étant justement de finir le travail). Dans cette centaine de pages [51], nous avons regroupé de nombreux résultats concernant les hyperdéterminants, les fibrés de Steiner, les fibrés logarithmiques et les fibrés de Schwarzenberger. Un effort y était fait pour garder un lien important avec les objets de la géométrie classique (ceux chers aux géomètres italiens) tout en utilisant l'arsenal moderne de la géométrie algébrique (élaboré en partie par les géomètres français). Je puiserai abondamment dans cette rédaction de Wykno afin d'alimenter ce manuscrit.

[1]http ://www.mimuw.edu.pl/ jarekw/EAGER/Wykno01.html

# Remerciements

Je veux remercier tout d'abord Christian Peskine qui fut mon professeur en maîtrise, DEA, puis mon directeur de thèse. Outre le soutien efficace qu'il m'a accordé lors de mes diverses candidatures, il a continué, et j'espère qu'il continuera encore, à me donner son avis, parfois ses conseils, lorsque je les ai sollicités. Ce soutien sur lequel j'ai le sentiment de pouvoir compter est un bien précieux. Pour tout cela je tiens à lui exprimer ma gratitude.

Je remercie Laurent Gruson pour avoir accepté de rapporter cette habilitation. Je voudrais aussi le remercier pour sa disponibilité de tous les jours lorsque nous étions collègues à Versailles. Je me souviens avec beaucoup de plaisir que nous pouvions débuter la journée en parlant des souvenirs d'égotisme de Stendhal pour poursuivre avec des représentations de groupes ou des variations sur Kronecker-Castelnuovo et finir par des discussions, forcément impossibles à conclure, sur l'ambivalence du progrès. J'ai appris beaucoup de mathématiques (entre autres choses) à son contact, en particulier au sein du groupe de travail de Versailles qu'il encadrait en grande partie.

J'ai connu Giorgio Ottaviani après ma thèse de doctorat. Il m'a accueilli à Florence en post-doctorat alors que j'avais un financement pour aller à Pise. J'ai tout de suite trouvé autour de lui (et de Vincenzo Ancona) une ambiance très stimulante. Le groupe qu'ils formaient avec leurs étudiants travaillait sur l'article de Dolgachev et Kaparanov qui est la clé de voute de cette habilitation. La beauté des collines de Pratolino où je vivais, la douceur du printemps en Toscane, la gentillesse des florentins m'ont immédiatement envouté. Florence est pour moi un monde à part, comme un lieu magique dans lequel un autre moi-même se déplace, avec plus d'aisance. Après ce premier séjour Giorgio m'a invité à plusieurs reprises notamment pour le seconder dans la série de cours donnée à Wykno en 2001. De tout cela et d'avoir bien voulu rapporter mon travail je le remercie très amicalement.

Lorsque Christoph venait de finir sa thèse il m'avait conseillé de me pencher sur la question de l'injectivité générique du morphisme de Barth que posait Joseph Le Potier. Je n'ai pas osé à cette époque aborder de front ce problème (que Joseph résoudra en 2000 avec Tikhomirov) mais cette question m'aura permis de comprendre que tout n'était pas dit même sur les objets basiques de la géométrie. Je le remercie donc très sincèrement pour cette suggestion qui oriente encore mon travail aujourd'hui et bien-sûr d'avoir accepté, dans une période d'activité soutenue, de faire partie de ce jury.

Je remercie Enrique Arrondo pour avoir accepté de rapporter cette habilitation et de venir travailler un mois à Pau. Sans avoir lu ses notes sur les fibrés de Steiner de rang plus grand que la dimension de l'espace, mais sachant qu'elles existaient, je me suis moi aussi intéressé à ces généralisations. Après avoir compris les liens entre faisceaux sur les courbes et fibrés de Schwarzenberger ainsi qu'entre faisceaux d'idéaux et faisceaux logarithmiques, j'ai rédigé quelques notes qu'il a eu l'amabilité de lire, soulignant les points communs mais aussi les différences justifiant une publication. Ce dernier travail publié lui doit donc beaucoup et j'espère que sa visite sera l'occasion, non seulement de goûter aux charmes du Béarn, mais aussi en confrontant nos approches de mettre en évidence de nouvelles et belles propriétés des faisceaux de Steiner.

Je remercie très chaleureusement Igor Dolgachev que je ne connais pas personnellement pour avoir accepté avec gentillesse de rapporter mon travail. C'est peu dire que j'admire le sien et le simple décompte des occurences de son nom dans le manuscrit qui suit suffit à expliquer à quel point il m'a inspiré.

Je voudrais remercier Jacky Cresson pour ses encouragements, son dynamisme et pour avoir soutenu, et souvent porté, les divers projets de notre équipe d'algèbre et géométrie. J'ai déniché dernièrement une citation de Paul Valéry ([2]) qui à mon sens lui conviendra parfaitement : "J'ai beau faire, tout m'intéresse." Nous nous connaissons depuis le séminaire interdisciplinaire d'Izotges ([3]), ce qui remonte à loin et qui donne certaines ambitions.

Lorsque que mes parents après une trentaine d'années à l'île de la Réunion, sont retournés (plein d'usage et raison) vivre à Izotges, j'ai sollicité un échange avec un collègue de l'Université de Pau. Mes anciens collègues de Versailles, notamment ceux de l'équipe d'algèbre ont eu la bienveillance de me laisser partir, ce dont je les remercie encore, tandis que mes nouveaux collègues de Pau m'ont accueilli avec une grande gentillesse, ce dont je tiens aussi à les remercier.

Merci bien-sûr à Daniele Faenzi et Vincent Florens, mes deux compères de l'équipe d'Algèbre et Géométrie, grâce à qui le quotidien mathématique est devenu aussi agréable. Depuis leurs arrivées, les projets, les invités, les groupes de travail et autres séminaires se suivent à un rythme presque étourdissant. Bien entendu merci au laboratoire, à Marie-Laure Rius pour son aide efficace dans l'organisation de cette soutenance et de la rencontre simultanée, à Laurent Bordes son directeur et à ses membres qui nous donnent les moyens pécuniaires de cet étourdissement.

Enfin je remercie tous les membres du jury d'avoir en outre accepté de donner un exposé pour la conférence de géométrie algébrique que notre petite équipe organise autour de cette soutenance. Entre les montagnes et les puits de forage les rencontres de géométrie algébriques sont rares et je me suis amusé (immodestement, je m'en excuse) à l'annoncer comme la seconde après celle de cryptographie organisée par Henri IV et François Viète [4].

[2]Cahiers

[3]Izotges : petit village gersois, voisin de Lupiac où naquit d'Artagnan, situé dans la plaine de l'Adour, entre les vignes du madiran et celles de l'armagnac.

[4]trichant avec l'histoire car je doute que Viète soit jamais venu à Pau

# Notations usuelles

$\mathbb{P}^n$ : Espace projectif complexe.
$V$ : Espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
SL(2) : Groupe des matrices $2 \times 2$ à coefficients complexes de déterminant égal à 1.
$S_n$ : Le $SL(V)$ module irréductible $\mathrm{Sym}^n(V)$.
$s_n$ : La dimension de $S_n$.
$\mathrm{Seg}(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ : Image du produit $\prod \mathbb{P}^{n_i}$ par le morphisme de Segre

$$\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \hookrightarrow \mathbb{P}^{\prod(n_i+1)-1}.$$

Lorsque $n_i = n$ pour $i = 1, \cdots, r$ on notera aussi $\mathrm{Seg}(n; r)$.
$D$ ou $C$ : Coniques lisses de $\mathbb{P}^2$.
$C_n$ : Courbe rationnelle normale plongée dans $\mathbb{P}^n$.
$\mathbb{F}$ : La variété d'incidence points-hyperplans de $\mathbb{P}^n$ munie des morphismes de projection $p$ (resp. $q$) sur $\mathbb{P}^n$ (resp. sur $\mathbb{P}^{n\vee}$).
$H$ : Hyperplan de $\mathbb{P}^n$ correspondant au point $h = H^\vee$ de $\mathbb{P}^{n\vee}$.
$L$ : Droite de $\mathbb{P}^2$ correspondant au point $l = L^\vee$ de $\mathbb{P}^{2\vee}$.
$x$ : Point de $\mathbb{P}^n$ correspondant à l'hyperplan $x^\vee$ de $\mathbb{P}^{n\vee}$.
$v_n(\mathbb{P}^d), v_{n,d}$ : La variété de Veronese des puissances $n$ ièmes des formes linéaires en $d+1$ variables. On notera aussi $v_n$ lorsqu'il y aura pas de confusion possible sur l'espace de départ.
$\mathfrak{X}_{n,n+m}$ : Variété des plans ayant un contact d'ordre $m$ avec $v_{n,n+m}$.
$\mathfrak{X}^{m\vee}_{n,n+m}$ : Variété des plans ayant un contact d'ordre $m$ avec $\mathfrak{X}_{n,n+m}$.
$\mathfrak{C}_n(D)$ : Coniques $n$-circonscrites à la conique $D$.
$M_n(D)$ : Coniques $n$-circonscrites strictement à la conique $D$.
$E_{n,n+m}(D)$ : Fibré de Schwarzenberger associé à la conique $D$ dont les classes de Chern sont déterminées par les données de $n$ et de $m$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible quant à la conique associée, on notera aussi $E_{n,n+m}$.
$E(Z)$ : Fibré logarithmique associé aux hyperplans correspondant par dualité aux points de $Z$.
$E_r(Z)$ : Fibré logarithmique généralisé associé aux hyperplans correspondant par dualité aux points de $Z$.
$S(E)$ : Schéma des droites de saut du fibré vectoriel $E$ de rang deux sur $\mathbb{P}^2$. Ce sera un schéma, un diviseur ou tout simplement un ensemble selon le contexte.
$J(E)$ : Diviseur des coniques de saut du fibré vectoriel $E$ de rang deux sur $\mathbb{P}^2$.

# Chapitre 2

# Géométrie classique

Dans cette première partie je reviens rapidement sur les circonstances historiques qui ont amené Poncelet à poser les bases de la géométrie algébrique moderne. Je rappelle les énoncés du "grand théorème de Poncelet" ainsi que le théorème de Darboux. Enfin, après quelques rappels sur les involutions de Frégier, je propose un théorème de type Poncelet concernant les réunions de droites circonscrites à une conique fixée (partie 2.1). Toute variété intègre est isomorphe à sa biduale ; ce qui est vrai pour la dualité ne l'est pas pour l'osculation. En particulier la surface de Togliatti n'est pas isomorphe à sa variété biosculatrice, c'est ce que j'explique dans la partie 2.2. Dans la partie 2.3 je rappelle quelques généralités sur les revêtements doubles du plan projectif et j'insiste sur les deux premiers cas ; à savoir ceux dont les courbes de ramifications sont des coniques lisses ou des quartiques lisses. Enfin ce chapitre se termine par quelques mots sur les variétés d'incidence points-hyperplans de $\mathbb{P}^n$ (partie 2.4).

## 2.1 Théorèmes de Poncelet

Le 17 novembre 1812, un jour avant que la grande armée, commandée par le Maréchal Ney et dans laquelle servait le jeune lieutenant Poncelet, ne soit écrasée à Krasnoï par le vieux général Koutouzof, Napoléon Bonaparte réussit à rejoindre la France. Dans ses mémoires d'outre-tombe Chateaubriand relate l'épisode avec emphase ([14], page 211, tome 2) :
"Les hauteurs environnantes au pied desquelles marchait Napoléon, se chargeaient d'artillerie et pouvaient à chaque instant le foudroyer ; il y jette un coup d'œil et dit : "Qu'un escadron de mes chasseurs s'en empare !" Les Russes n'avaient qu'à se laisser rouler en bas, leur masse l'eût écrasé ; mais, à la vue de ce grand homme et des débris de la garde serrée en bataillon carré, ils demeurèrent immobiles, comme fascinés : son regard arrêta cent mille hommes sur les collines."([1])

[1] Voici ce qu'écrit Tolstoï à propos du même évènement ([62], page 585 vol 2) : "Puis on nous décrit son héroïsme à Krasnoïe où dit-on, il se prépare à accepter la bataille et à la diriger lui-même, et où il se promène avec un bâton de bouleau et dit : " J'ai assez fait l'Empereur il est temps de faire le général", et malgré cela, aussitôt après, il reprend sa fuite en abandonnant

Le lendemain Jean-Victor Poncelet, blessé, est fait prisonnier et rejoindra après cinq mois de marche, sous un froid polaire, la petite ville de Saratov sur les bords de la Volga. Poncelet raconte cet épisode dans la préface de son livre [41] publié en 1822. Il insiste sur son isolement intellectuel, sur l'absence d'ouvrage, sur la nécéssité de retrouver seul "péniblement, et pour ainsi dire un à un, les éléments indispensables aux études mathématiques..."

Lorsqu'il quitte Saratov, devinant qu'il n'aurait pas d'autres occasions de bénéficier des avantages que procure l'isolement du monde, Poncelet écrit "quand je dus abandonner cette ville renaissante, à longues files de maisons isolées, en bois, etc.., les steppes incultes, mais non pas stériles, qui l'entourent, je ne pus me défendre d'une émotion profonde et d'un vif sentiment d'appréhension, en me demandant si, au milieu de la vie active qui m'attendait, je pourrais poursuivre, comme dans le silence et la solitude de l'exil, les études qui en avaient adouci l'amertume et m'étaient par là devenues si chères."

Ses études si chères introduisaient la dualité par polaires réciproques, le très controversé principe de continuité, et avec elles naissait la géométrie algébrique moderne. Lors de ce séjour il démontre son grand théorème sur les polygones simultanément inscrits dans une conique et circonscrits à une autre. La question était d'actualité pour ce qui concerne les cercles depuis la fin du XVIIIième siècle (voir les travaux d'Euler et de Fuss en 1792) ([2]). Expliquons de quoi il retourne.

Prenons deux cercles concentriques et partant d'un point du cercle extérieur commençons à tracer des droites tangentes au cercle intérieur. Continuons le même procédé à partir du deuxième point d'intersection de cette droite avec le cercle extérieur. Il est évident que le procédé s'arrêtera au bout de $n$ étapes si et seulement si l'angle en un sommet du polygone inscrit est $\frac{2\pi}{n}$. La situation des cercles concentriques correspond au cas de deux coniques bitangentes aux points cycliques $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$. Décalons le cercle intérieur afin qu'il ne soit plus concentrique et tout devient beaucoup plus difficile. Pourtant Poncelet montre, dans ce cas aussi, que l'existence d'un polygone inscrit dans le cercle et circonscrit à l'autre ne dépend que des deux cercles et pas du sommet choisi au départ de la construction. Autrement dit tout point du cercle extérieur sera le sommet d'un polygone à $n$-côtés inscrit et circonscrit au cercle intérieur. Contrairement au cas de concentricité il n'existe aucune démonstration simple de ce résultat. Ce théorème concerne plus généralement deux coniques lisses $C$ et $D$ se coupant en quatre points distincts. On dit que $C$ est $n$-circonscrite à $D$ si $C$ passe par $n$ sommets consécutifs d'un polygone $\mathcal{P}_n$ à $n$ côtés tangents à $D$. On dira aussi que $\mathcal{P}_n$ est $n$-inscrit dans $C$. On distingue le polygone $\mathcal{P}_n$ et ses $n$ sommets consécutifs du polygone complet formé par la réunion des $n$ droites portant les $n$ côtés de $\mathcal{P}_n$ ; ce polygone complet possède $\binom{n}{2}$ sommets.

---

à leur sort les fragments disloqués de son armée qui se trouvent derrière lui. [...] Même ce dernier acte, la fuite, qui, dans le langage humain, s'appelle la dernière des infamies, cet acte dont on apprend à chaque enfant à avoir honte trouve aussi sa justification dans le langage des historiens."

[2] De nombreux mathématiciens depuis ont travaillé sur ces problèmes. Les conditions de fermeture sont expliquées par Halphen, Poncelet lui-même, Jacobi, Cayley et il y a quelques années par Berger, Griffiths et Harris etc.

**Théorème 2.1.1** (grand théorème de Poncelet)**.** *Soient $C$ et $D$ deux coniques telles que $C$ soit $n$-circonscrite à $D$. Alors tout point général de $C$ est le sommet d'un polygone à $n$ côtés tangent à $D$ et $n$ inscrit dans $C$.*

*Démonstration.* Je rappelle brièvement l'idée de la preuve de Jacobi (reprise et expliquée dans [24]). On considère la courbe d'incidence $E \subset C \times D^{\vee}$, où $E = \{(x,l), x \in l\}$. C'est une courbe elliptique lisse puisque les projections sur $C$ et $D^{\vee}$ sont des revêtements doubles ramifiés au-dessus des quatre points d'intersection d'un côté et au-dessus des quatres tangentes communes de l'autre côté. On définit alors deux involutions sur $E$. Soit $(x,l) \in C \times D^{\vee}$. La droite $l$ coupe $C$ en un autre point $x^{'}$. Soit $l^{'}$ la seconde tangente à $D$ issue de $x$. Nous avons alors les involutions suivantes :

$$E \xrightarrow{i_1} E, \quad (x,l) \mapsto (x^{'}, l)$$

$$E \xrightarrow{i_2} E, \quad (x,l) \mapsto (x, l^{'})$$

Soit $\mathfrak{o}$ l'origine de $E$ pour la loi de groupe $+$. Il existe alors $a \in E$ et $b \in E$ tels que $i_1(z) = -z + a$ et $i_2(z) = -z + b$. Par conséquent le produit $i_2 i_1$ est une translation sur $E$, plus précisément $i_2 i_1(z) = z + (b-a)$. Il s'ensuit que le polygone se referme à l'étape $n$ si et seulement si $n.(b-a) = \mathfrak{o}$. Cela signifie que $C$ est $n$-circonscrite à $D$ si et seulement si $(b-a)$ est un point de torsion d'ordre $n$ sur $E$. Ceci ne dépend pas du choix du point $x \in C$, mais seulement du choix des coniques $C$ et $D$. □

**Remarque 2.1.2.** *Si l'on débute la construction au point $x$ en traçant la seconde tangente à $D$ alors $(b-a)$ devient $(a-b)$ ce qui ne change pas sa nature (c'est encore un point de torsion d'ordre $n$).*

En reprenant les idées (le calcul sur les courbes elliptiques) qui ont permis à Jacobi de redémontrer le grand théorème de Poncelet, Cayley montre que l'ensemble des coniques $n$-circonscrites à une conique fixée $D$, est une hypersurface $\mathfrak{C}_n(D)$ de $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)))$. Il en donne une équation en considérant le développement en série de la racine carrée du polynôme $\det(C + xD)$ où $C$ et $D$ désignent les matrices symétriques associées aux coniques $C$ et $D$. Ceci est très bien expliqué dans l'article [24]. Bien entendu, pour tout $r \geq 3$ divisant $n$ l'hypersurface des coniques $n$-circonscrites contient celle des coniques $r$-circonscrites. L'hypersurface $\mathfrak{C}_n(D)$ n'est donc pas irréductible dès lors que $n$ n'est pas premier. On note $M_n(D)$ les coniques strictement $n$-circonscrites.

Le calcul du degré de $M_n(D)$ se trouve dans l'ouvrage de Halphen ([32], chap. IV et chap. X). Récemment Barth et Bauer en ont redonné une preuve. Ils notent $T(n)$ le nombre de racines primitives parmi les points de torsion d'ordre $n$ de $E$ et prouvent que $\deg(M_n(D)) = \frac{T(n)}{4}$ ([7], theorem 3.3).

La preuve de Jacobi permet de comprendre que $\mathfrak{C}_n(D)$ est la somme des degrés des hypersurfaces $M_r(D)$ pour $3 \leq r < n$ et $r \mid n$. Le nombre de points de torsion d'ordre $n$ sur $E$ est $n^2$ ; on en déduit que le degré de $\mathfrak{C}_n(D)$ est $\frac{n^2-4}{4}$ quand $n$ est pair (on retire les points d'ordre 2), $\frac{n^2-1}{4}$ lorsque $n$ est impair (on retire l'origine). La division par 4 s'explique pour deux raisons. Tout d'abord, comme nous venons de le voir, le choix d'un point de torsion ou de son opposé conduit au même polygone, ce qui explique une première division par 2. Par ailleurs le morphisme de dualité sur les coniques $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^{5\vee}$ envoie un pinceau de coniques sur une conique de coniques (les mineurs d'une matrice symétrique $3 \times 3$ sont de degré 2) ; or le calcul effectué dans le pinceau $\lambda C + \mu D$ donne un nombre de points sur la conique duale (du pinceau). Aussi faut-il encore diviser par le degré de la conique pour avoir le degré de l'hypersurface. Par contre si l'on s'intéresse aux coniques inscrites le degré est $\frac{n^2-1}{2}$ pour $n$ impair et $\frac{n^2-4}{2}$ pour $n$ pair.

**Remarque 2.1.3.** *Si $\Gamma \in M_n(D) \cap M_m(D)$ pour $m \neq n$ alors $\Gamma$ est une conique singulière. C'est une conséquence immédiate du théorème 2.1.1. On en déduit que $\mathfrak{C}_n(D) = \bigcup_{r\geq 3, r|n} M_r(D)$ est réduit.*

Les cas des coniques tangentes, bitangentes, osculatrices ou surosculatrices sont étudiés dans [11] (section 7.14 page 329-331). Les auteurs montrent qu'une conique lisse $C$ tangente ou bitangente à $D$ peut-être $n$-circonscrite à $D$ mais que ce n'est jamais le cas pour les osculatrices et surosculatrices. Ils considèrent pour cela l'image réciproque de $C$ par le revêtement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié au-dessus de $D$. Dans la partie de ce texte consacrée aux coniques de saut nous montrons avec un nouvel argument qu'une conique osculatrice de $D$ (a fortiori surosculatrice) n'est jamais $n$-circonscrite à $D$.

Plus généralement, considérons un polygone à $n$ côtés, tous tangents à une conique fixée $D$. Alors les courbes de degré $n-1$ passant par les $\binom{n}{2}$ sommets du polygone complet sont appelées courbes de Poncelet. Darboux a montré le théorème suivant :

**Théorème 2.1.4** ([17], p. 248)**.** *Si une courbe de degré $n-1$ contient tous les points d'intersection de $n$ tangentes à une conique, elle contient aussi les points d'intersection d'une infinité d'autres systèmes de $n$ tangentes à la même conique.*

Dans la dernière partie de ce mémoire je donnerai de nouvelles démonstrations de ces théorèmes (de Darboux et de Poncelet) en utilisant les sections globales et les coniques de saut d'un certain fibré associé à la conique inscrite. Soulignons que toute cubique est de Poncelet mais que seules les quartiques de Luroth (formant un diviseur de l'espace des quartiques) sont de Poncelet.

Lorsque le polygone n'est pas tangent à une conique les courbes de degré $n-1$ passant par les sommets sont appelées courbes de Darboux. Une quartique de Darboux est de Poncelet, ce n'est plus le cas pour une quintique.

## Théorème de Poncelet pour des arrangements de droites

Je présente ci-dessous un théorème, du type de ceux de Poncelet, portant sur les polygones tangents à une conique fixée et inscrits dans une réunion de droites.

Pour deux droites il s'agit d'une version singulière du grand théorème de Poncelet. Pour plus de deux droites ces résultats me semblent nouveaux, dans la mesure où il est encore possible d'écrire des choses nouvelles (et assez simples) sur un tel sujet.

L'idée est qu'une droite, vue comme polaire d'un point du plan définit une unique involution sur la conique. Le point polaire (appelé **point de Frégier**) est le centre de l'involution (donnée par les droites passant par ce point). Un arrangement de droites correspond par dualité à la donnée de $n$ points, soit à la donnée de $n$ involutions. Il s'agit alors d'étudier la composition de ces involutions. Pour trois involutions, comme le remarque Mneimné, nous retrouvons le théorème de l'hexagramme de Pascal ([45], exercice O-B.11.25).

**Définition 2.1.5.** *Un polygone à $2n$-cotés est "bien inscrit" dans une configuration de $n$-droites si et seulement si chaque droite de la configuration passe par exactement deux sommets du polygone.*

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant.

**Théorème 2.1.6.** *Soient $\mathbb{L}_n$ une configuration de $n$ droites et $C$ une conique lisse de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. S'il existe un polygone de $2n$ côtés bien inscrit dans $\mathbb{L}_n$ et circonscrit à $C$ alors il existe une infinité de tels polygones. En d'autres termes tout point de $\mathbb{L}_n$ est le sommet d'un tel polygone.*

**Remarque 2.1.7.** *La configuration $\mathbb{L}_n$ n'est pas une courbe de Poncelet et ce théorème ne résulte ni du grand théorème de Poncelet ni du théorème de Darboux.*

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur les automorphismes, plus précisément les involutions, de la droite projective complexe. C'est pourquoi nous rappelons brièvement quelques résultats classiques sur ce sujet voire même nous démontrons quelques résultats nouveaux concernant les **produits d'involutions**.

**Proposition 2.1.8.** *Une involution possède exactement deux points fixes sur $\mathbb{P}^1$ et elle est déterminée par ses points fixes.*

Une involution sur $\mathbb{P}^1$ définit une unique involution sur $\mathrm{Sym}^2\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^2$. En effet considérons le plongement de Veronese (on note $D \subset \mathbb{P}^2$ l'image de $\mathbb{P}^1$). Soient $x_1$ et $x_2$ les deux points fixes d'une involution sur $\mathbb{P}^1$. Les droites tangentes à $D$ le long de leurs images s'intersectent en un point $P \in \mathbb{P}^2 \setminus D$. Dès lors une droite générale passant par ce point coupe $D$ en deux points distincts. L'involution $u \in \mathrm{Aut}(D) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ qui permute ces deux points est appelée **involution de Frégier**. Le point $P$ est le **centre** de l'involution.

**Remarque 2.1.9.** *Toute involution sur $D$ est une involution de Frégier.*

La question est de savoir quand le produit de $n$ involutions est encore une involution. Considérons pour commencer le cas bien connu de deux involutions.

**Proposition 2.1.10.** *Soient $u$ et $v$ deux involutions sur $D$ possèdant des points fixes distincts. L'automorphisme $uv$ est une involution si et seulement si les deux points fixes de $u$ et les deux points fixes de $v$ forment un quadruplet harmonique (i.e le birapport vaut $-1, 2$ ou $1/2$) sur $D$.*

Le cas suivant de trois involutions conduit au théorème de Pascal.

**Proposition 2.1.11.** *Soient $u$, $v$, et $w$ trois involutions avec des points fixes distincts, $x_u$, $x_v$ et $x_w$ leurs centres respectifs. Alors,*

$$(uvw)^2 = id_D \Leftrightarrow x_u, x_v \text{ et } x_w \text{ sont alignés.}$$

*Démonstration.* Supposons que les trois centres soient alignés et notons $L$ la droite qui les porte. La droite $L$ n'est pas tangente à $D$ car les trois involutions n'ont pas de point fixe en commun par hypothèse. Introduisons alors $\{x, y\} = L \cap D$. On vérifie que $uvw(x) = y$ et $uvw(y) = x$. Soit $z \in D$ un point fixe de $uvw$. Les trois points $x, y$ et $z$ sont des points fixes de $(uvw)^2$. Ceci implique $(uvw)^2 = id_D$.

Réciproquement, supposons que $uvw$ soit une involution. Soit $x \in D$ tel que $v(x) = w(x) \neq x$. Appelons $L$ la droite joignant $x$ à $v(x)$, i.e passant par les centres $x_v$ et $x_w$. Il résulte de $v(x) = w(x) \neq x$ et de l'hypothèse $uvw = wvu$ que $wv$ possède quatre points fixes : $x, v(x), u(x), uv(x)$. Or l'automorphisme $wv$ n'a que deux points fixes. Les deux premiers sont distincts. Considérons le troisième $u(x)$. Si $u(x) = v(x)$ on a $u(x) = v(x) = w(x)$ et nous avons fini, donc $u(x) = x$. Considérons le quatrième $uv(x)$. Si $uv(x) = x$ nous avons encore $u(x) = v(x) = w(x)$ et nous avons fini, donc $uv(x) = v(x)$. Il s'ensuit que $x, v(x)$ sont des points fixes de $u$ et de $uvw$, ce qui contredit le fait qu'une involution est caractérisée par ses points fixes. □

**Corollaire 2.1.12** (théorème de Pascal)**.** *Soient $p_1, p_2, p_3, q_3, q_2, q_1$ six points (ordonnés) sur une conique lisse $D$. Soit $x_{ij}, i < j$ le point d'intersection des deux droites joignant $p_i$ à $q_j$ et $p_j$ à $q_i$. Alors les trois points $x_{12}, x_{13}$ et $x_{23}$ sont alignés.*

*Démonstration.* On note $u$ l'involution sur $D$ de centre $x_{12}$, $v$ celle de centre $x_{23}$ et $w$ la dernière de centre $x_{13}$. Alors en suivant les droites on vérifie que

$$(uvw)(p_1) = q_1, (uvw)(q_1) = p_1.$$

Soit $z$ un point fixe de $uvw$. Alors $z, p_1, q_1$ sont des points fixes de $(uvw)^2$. Comme un élément de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ qui a trois points fixes est l'identité, on a bien prouvé que $(uvw)^2 = id_D$. Le résultat est alors une conséquence immédiate de la proposion 2.1.11. □

**Remarque 2.1.13** (point de Gergonne)**.** *Soit un triangle de sommets $x, y, z$ sur un cercle $C$. Considérons sur le cercle les involutions, $u$ qui admet $x$ pour point fixe et qui échange $y$ et $z$, $v$ qui admet $y$ pour point fixe et qui échange $x$ et $z$ et enfin $w$ qui admet $z$ comme point fixe et qui échange $x$ et $y$. On vérifie* *immédiatement que $x, y$ et $z$ sont des points fixes de $(uvw)^2$, i.e que $uvw$ est une involution et que les trois centres sont alignés. En dualisant la figure on retrouve l'énoncé suivant (attribué parfois à Gergonne) qui affirme que : Les trois ceviennes d'un triangle donné aboutissant aux points de tangence avec son cercle inscrit sont concourantes (en un point appelé "point de Gergonne").*

À ma connaissance la littérature ne traite pas le cas de plus de trois involutions. Pourtant on peut poser au moins deux questions assez naturelles :

**Question 1.** *Quelles figures géométriques apparaissent lorsqu'un produit de $n$ involutions est encore une involution (par exemple le quadrangle harmonique pour $n = 2$) ? Quelle relation géométrique relie les centres des involutions lorsque le produit est encore une involution (alignement des centres pour $n = 3$) ?*

Pour tenter d'y répondre considérons $n$ involutions que l'on note $u_1, \cdots, u_n$ et $c_1, \cdots, c_n$ leur centres respectifs. Ce sont des involutions sur la conique $D \subset \mathbb{P}^2$. Sur le plan dual vit la conique duale $D^\vee$ et une configuration $\mathbb{L}_n = l_1 \cup \cdots \cup l_n$ de $n$ droites qui sont les duales des centres, i.e $l_i := c_i^\vee$. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe de permutation de $n$ objets. On rappelle qu'une courbe est dite $N$-circonscrite à une conique lisse $D$ si et seulement si cette courbe contient $N$ sommets $x_1, \cdots, x_N$ d'un polygone à $n$ côtés tangents à $D$. En d'autres termes (quitte à réordonner les points) les droites $(x_i x_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq N-1$ ainsi que la droite $(x_N x_1)$ sont tangentes à $D$. On énonce alors la caractérisation suivante :

**Théorème 2.1.14.** *La courbe $\mathbb{L}_n = l_1 \cup \cdots \cup l_n$ est $2n$-circonscrite à $D^\vee$ si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(n)}$ (où $u_i$ est l'involution sur $D$ de centre $l_i^\vee$) est une involution.*

**Remarque 2.1.15.** *Ceci prouve le théorème 2.1.6.*

*Démonstration.* On dualise la situation. Le $2n$-gone donné, bien inscrit dans $\mathbb{L}_n$ et circonscrit à $D$ correspond par dualité à la donnée de $2n$ points sur $D^\vee$ (les points de tangence) reliés par $2n$ droites (duales des $2n$ sommets) qui se coupent deux par deux en $n$ points (duaux des $n$ droites de la configuration). Considérons les $n$ involutions associées dont les centres sont $l_1^\vee, \cdots, l_n^\vee$. On note $x_{i,1}$ et $x_{i,2}$ les deux sommets sur la droite $l_i$. Soit $x_{i,1} \in D^\vee$ un sommet du $2n$-gone inscrit. Alors (quitte à réordonner) nous avons $(u_1 \cdots u_n)^2(x_{i,1}) = x_{i,1}$. Il est clair que nous avons aussi $(u_1 \cdots u_n)^2(x_{i,2}) = x_{i,2}$. Ces deux points fixes de l'automorphisme $(u_1 \cdots u_n)^2$ sont échangés par $u_1 \cdots u_n$. Soit $x$ un point fixe du produit $u_1 \cdots u_n$, alors clairement $x$ est aussi un point fixe de $(u_1 \cdots u_n)^2$. Mais comme $x_{i,1}$ et $x_{i,2}$ sont échangés par $u_1 \cdots u_n$ ils ne coïncident pas avec $x$ et cela implique que $(u_1 \cdots u_n)^2$ admet trois points fixes, d'où il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $(u_1 \cdots u_n)^2 = \lambda I$. Ainsi pour tout point $p \in D^\vee$ le polygone construit en joignant consécutivement les sommets suivants

$$\{p, u_1(p), (u_2 u_1)(p), \cdots, (u_n \cdots u_1)(p), \cdots, (u_{n-1} \cdots u_1 u_n \cdots u_1)(p)\}$$

est inscrit dans $D^\vee$ et correspond à un polygone circonscrit à $D$ et inscrit dans $\mathbb{L}_n$. □

## Conditions de fermeture

On voudrait donner des conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'un produit de $n$ involutions soit encore une involution, comme pour les cas $n = 2$ et $n = 3$. La condition d'alignement suivante est suffisante :

**Proposition 2.1.16.** *Soit $u_1, \cdots, u_{2n+1}$ des involutions sur une conique $D \subset \mathbb{P}^2$ avec les centres respectifs $c_1, \cdots, c_{2n+1}$. Si $c_1, \cdots, c_{2n+1}$ sont alignés alors $u_1 \cdots u_{2n+1}$ est une involution.*

*Démonstration.* Posons $v = u_1 \cdots u_{2n+1}$. On rappelle que les points fixes de $v$ sont aussi des points fixes pour $v^2$. Soit $L$ la droite des centres et $L \cap D = \{x_0, x_1\}$. Ces points sont échangés par $v$, et donc ne sont pas des points fixes de $v$ mais ils sont fixes pour $v^2$. Ce qui implique que $v$ est une involution. $\square$

Tout comme une version duale du théorème de Pascal correspond au théorème de Brianchon, une version duale de cette proposition donne un théorème de Brianchon généralisé :

**Corollaire 2.1.17** (Brianchon généralisé)**.** *$2n+1$ droites concourantes coupant une conique lisse en $4n+2$ points distincts forment une configuration $2(2n+1)$-circonscrite à cette conique.*

Sauf pour $n = 1$ cette condition de concours est suffisante mais pas nécéssaire. En effet, considérons une droite $l$ et trois points $x_1, x_2$ et $x_3$ sur $l$. On leur associe les trois involutions de Frégier $u_1, u_2$ et $u_3$. Alors le produit $w = u_1u_2u_3$ est encore une involution dont le centre est aussi sur la droite $d$ (car $u_2u_1w$ est une involution). Considérons n'importe quelle droite $l$ distincte de $d$ passant par le centre de $w$. On choisit deux autres involutions $u_4$ et $u_5$ centrées sur $l$. Il est maintenant évident que le produit $u_1u_2u_3u_4u_5$ est une involution car $u_1u_2u_3u_4u_5 = wu_4u_5$ et les centres de $w$, $u_4$ et $u_5$ sont alignés.

Dans le cas du produit d'un nombre pair d'involutions il n'est pas non plus suffisant ; en effet, supposons que les centres des quatre involutions $u_1, u_2, u_3$ et $u_4$ soient alignés. Alors comme $u_{123} = u_1u_2u_3$ est une involution (d'après le théorème de Pascal), le produit $u_{123}u_4$ n'est une involution que lorsque leurs points fixes forment une division harmonique.

Par ailleurs si les centres son alignés il est évident que toute permutation des involutions dans le produit conduit à une nouvelle involution. Réciproquement nous conjecturons :

**Conjecture 1.** *Les centres $c_1, \cdots, c_{2n+1}$ sont alignés si et seulement si $\prod_{i=1}^{2n+1} u_{\sigma(i)}$ est une involution pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.*

## Le grand théorème de Poncelet pour deux droites

On s'intéresse maintenant au cas d'une conique singulière (constituée de deux droites distinctes) qui est $n$-Poncelet associée à une conique lisse $D$ ; c'est dire qu'il existe un polygone à $n$-côtés inscrit dans la réunion des deux droites et circonscrit à la conique lisse. Comme les coniques $n$-Poncelet associées à une conique fixée forment une hypersurface de l'espace projectif $\mathbb{P}^5$ des coniques de $\mathbb{P}^2$, il existe une famille de dimension au moins trois de coniques singulières $n$-Poncelet associées à $D$. On énonce donc ci-dessous un cas particulier du théorème de Poncelet, mais nous en proposons une preuve simple reposant sur les involutions de Frégier.

**Théorème 2.1.18.** *Soient $l$, $d$ deux droites distinctes de $\mathbb{P}^2$, $l \cup d$ leur union et $D$ une conique lisse. Si la courbe $l \cup d$ contient les $n$ sommets d'un polygone avec $n$-côtés tangent à $D$ alors il contient une infinité de tels polygones. De plus si $n$ est impair alors $l$ ou $d$ doit être tangente à $D$.*

Ce dernier point concernant la parité est montré dans ([V6], thm. 2.2). L'idée est que deux droites coupant la conique en quatre points distincts ont un rôle identique (quitte à les échanger par SL(2)) donc contiennent le même nombre de sommets ; de plus le point d'intersection ne peut pas être un sommet car le polygone ne se fermerait pas. Introduisons les involutions de Frégier $u$ et $v$ de centres respectifs $l^\vee$ et $d^\vee$. Nous montrons alors :

**Proposition 2.1.19** ([V6], lem. 2.3)**.** *$(uv)^n = id$ si et seulement si $l \cup d$ est $2n$-circonscrite à $D$.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe $n \geq 2$ tel que $(uv)^{n-1} \neq id$ et $(uv)^n = id$. Soit $x_1$ un point sur $D^\vee$ tel que $(uv)^{n-1}(x_1) \neq x_1$. Les points

$$\{x_1, v(x_1), uv(x_1), \cdots, v(uv)^{n-1}(x_1)\}$$

sont les sommets d'un $2n$-gone inscrit dans $D^\vee$ tel que $n$ côtés passent par $l^\vee$ et les $n$ autres côtés passent par $d^\vee$. Dualement nous avons dessiné un polygone $2n$-circonscrit à $D$ dont $n$ sommets sont sur $l$ et les $n$ autres sur $d$.

Réciproquement, soit $l \cup d$ une conique singulière $2n$ circonscrite à $D$. Par dualité cette situation correspond à la donnée de $n$ droites passant par le point $l^\vee$ et $n$ droites passant par l'autre point $d^\vee$. Comme deux points du $2n$ polygone sont joints par une droite tangente à $D$ on obtient un point sur $D^\vee$ sur lequel deux droites (une par $l^\vee$ l'autre par $d^\vee$) s'intersectent. Soit $x_1$ un sommet de ce polygone inscrit. On applique alternativement les involutions de Frégier $v$ et $u$ de centres respectifs $d^\vee$ et $l^\vee$. Cela donne une liste de sommets $x_2, \cdots, x_{2n}$ avec $x_{2n+1} = x_1$ par hypothèse. Tous les points $x_{2r+1}$, pour $1 \leq r \leq n$ sont des points fixes pour $(uv)^n$. Comme un automorphisme différent de l'identité possède au plus 2 points fixes, ceci prouve que $(uv)^n = id$ lorsque $n \geq 3$. □

Enfin pour terminer cette partie par quelques calculs élémentaires, nous définissons par induction une famille de polynômes sur le plan complexe :
$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ et pour $n \geq 2$, $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.
Quand $x^2 \neq 4$ il est bien connu que ces polynômes de Fibonacci sont

$$P_{n-1}(x) = \frac{(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2})^n - (\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2})^n}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Ainsi la proposition précédente peut-elle s'écrire :

**Proposition 2.1.20.** *Soient* $(1,-1)$ *et* $(0,2/x)$ *les points fixes de* $u$ *et* $v$*. Alors,*

$$(uv)^n = id \Leftrightarrow P_{n-1}(x) = 0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x^2-4})^n = (x-\sqrt{x^2-4})^n.$$

*Démonstration.* Deux matrices représentatives de $u$ et $v$ sont $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix}$. Le produit est donc donné par la matrice

$$(uv)^n = \begin{pmatrix} xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) & -P_{n-1}(x) \\ P_{n-1}(x) & -P_{n-2}(x) \end{pmatrix}$$

et cette matrice est l'identité si et seulement si $P_{n-1}(x) = 0$. □

## 2.2 La surface de Togliatti

Considérons le morphisme canonique

$$\mathrm{Sym}^i(V) \otimes \mathrm{Sym}^j(V) \longrightarrow \mathrm{Sym}^{i+j}(V)$$

où $V$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension plus grande que 2. Le cas de la dimension égale à 2 correspond aux fibrés de Schwarzenberger que nous étudierons plus loin. L'étude de cette application de multiplication ou de l'application duale qui est la dérivation conduit naturellement aux variétés de Veronese et à leurs variétés tangentes. Pour être plus précis : on note $v_n(\mathbb{P}^2)$ la surface de Veronese plongée dans l'espace des courbes planes de degré $n$. Le plan tangent en un point $l^n$, où $l$ est une forme linéaire, s'identifie aux courbes $l^{n-1}d$, pour $d$ une forme linéaire quelconque. Un hyperplan tangent contient un tel plan et par dualité correspond à une courbe de degré $n$ possèdant un point double au point $l^\vee$. La variété discriminant notée $\mathfrak{X}_{2,n}$ est donc la duale de $v_n(\mathbb{P}^2)$. Plus généralement un hyperplan osculateur correspond à une courbe de degré $n$ avec un point triple, etc. On peut alors vérifier un théorème de bidualité supérieure pour les variétés de Veronese, à savoir $\mathfrak{X}_{n,n+m}^{m\vee} = v_{n+m}$. En effet, ceci résulte d'un travail de Ragni Piene dans le cadre plus large des Grassmaniennes ([54], prop. 1).

En particulier une projection générale vérifie ce théorème généralisé de bidualité. Cependant des projections particulières pour lesquelles ce résultat n'est pas vrai existent. Une au moins est bien connue dans la littérature ([61], [23], [38], [59]), il s'agit de la surface de Togliatti. Cette surface est obtenue en projetant la Veronese $v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^9$ par le système des cubiques passant par trois points non alignés du plan projectif (c'est aussi la surface de Del Pezzo de degré 6). Son image dans le $\mathbb{P}^6$ à l'infini possède la propriété suivante : ses hyperplans osculateurs ont un point commun. Le théorème de Togliatti affirme que la seule projection lisse de $v_3(\mathbb{P}^2)$ sur $\mathbb{P}^6$ dont les hyperplans osculateurs (ou tangents du second ordre, ou vérifiant une équation de Laplace) est, modulo changement de coordonnées sous PGL(3), la projection de centre $(X_0^3, X_1^3, X_2^3)$. Plus précisément, on considère le plongement de Veronese du plan projectif dans l'espace des cubes

$$\mathbb{P}^2 \to v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^9.$$

On considère une réseau de cubiques $\bigwedge$ sans point fixe et on note $S_\bigwedge$ l'image de $v_3(\mathbb{P}^2)$ par la projection de centre $\bigwedge$. On suppose que les hyperplans osculateurs de $S_\bigwedge$ ont un point commun. Le théorème de Togliatti affirme alors que :

**Théorème 2.2.1** ([61]). *La surface $S_\bigwedge$ est l'image de $\mathbb{P}^2$ par le système linéaire des cubiques passant par trois points non alignés. En d'autres termes, quitte à faire un changement de coordonnées le centre est $\bigwedge = (X_0^3, X_1^3, X_2^3)$.*

*Démonstration.* Cette preuve, que je dois à Laurent Gruson, serait (d'après G. Ilardi) proche de celle de Togliatti ([61]).

Tout d'abord expliquons pourquoi lorsque $\bigwedge = (X_0^3, X_1^3, X_2^3)$ la surface $S_\bigwedge$ possède cette propriété de concours des hyperplans osculateurs. Il s'agit de trouver un $\mathbb{P}^3$, contenant ce plan $\bigwedge$ de projection dans $\mathbb{P}^9$, qui rencontre tous les $\mathbb{P}^5$ osculateurs de $v_3(\mathbb{P}^2)$. On considère le $\mathbb{P}^3$ engendré par $(X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_0X_1X_2)$. Pour toute droite $l = \sum \alpha_i X_i$ la dimension de cet espace vectoriel restreint à $l$ chute. En effet si l'on note $x_0$ la classe de $X_0$ modulo $l$, on a,

$$x_0x_1x_2 \in < x_0^3, x_1^3, x_2^3 > .$$

C'est la polarité sur la cubique gauche (image de $l$ dans $\mathbb{P}^3$) qui affirme que le plan engendré par les points de contact de trois plans osculateurs de la cubique contient le point d'intersection des trois plans.

Considérons le morphisme $\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ donnée par les quatre formes cubiques ([3]). Comme pour toute droite $l \in \mathbb{P}^2$ il existe une cubique du système linéaire

[3] On peut remarquer qu'apparaît une sorte d'autodualité ; on considère le plongement

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{(X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_0X_1X_2)} \mathbb{P}^3.$$

La surface image dans $\mathbb{P}^3 = Proj(\mathbb{C}[\beta_i])$ est la cubique d'équation $\beta_3^3 - \beta_0\beta_1\beta_2 = 0$. Considérons la suite exacte courte

$$0 \to O_{\mathbb{P}^2}^3(-2) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^4 \longrightarrow J_Z(6) \to 0$$

dont la première flèche est donnée par les dérivées partielles de $(X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_0X_1X_2)$ i.e. par la matrice

$$\begin{pmatrix} 3X_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3X_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3X_2^2 \\ X_1X_2 & X_0X_2 & X_0X_1 \end{pmatrix}$$

et la deuxième flèche par les mineurs maximaux qui sont

$$(3(X_0X_1X_2)^2, (X_1X_2)^3, (X_0X_2)^3, (X_0X_1)^3).$$

L'éclatement de l'idéal de $Z$ définit la surface duale dans $\mathbb{P}^3 = Proj(\mathbb{C}[\alpha_i])$ surface cubique d'équation

$$\alpha_0^3 - 27\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Ces deux surfaces sont clairement isomorphes. Le degré attendu pour la première surface était 9 et pour la surface duale $12 = 6^2 - l(O_Z)$.

s'écrivant $l \times C$ (où $C$ est une conique) on en déduit que l'image de $l$ est une cubique plane, i.e. une cubique singulière. Par conséquent sur toute droite deux points ont la même image. Le degré du morphisme est donc au moins égal à 2 (un système linéaire ne contracte pas de courbe et le cardinal d'une fibre est minimal sur un ouvert). Comme ce degré doit diviser 9 on en déduit qu'il est égal à 3 (9 est exclu sinon nous aurions un réseau de cubiques passant par 9 points). La fibre d'un point général est formée de trois points non alignés. Sinon la conique serait fixe et tout droite s'enverrait sur la même cubique singulière. Les trois droites joignant les trois points de la fibre ont pour image la cubique singulière.

L'application de $l$ sur la cubique singulière image $\Gamma$ est birationnelle ; on en déduit que l'application de la conique résiduelle $C$ sur $\Gamma$ est un revêtement double (i.e. à chaque point de $l$ on associe deux points sur $C$).

Si le revêtement triple $\mathbb{P}^2 \to S$, où $S$ est la cubique image, est galoisien son groupe de Galois est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dans une base adaptée, en tant qu'automorphisme de $\mathbb{P}^2$, il est diagonalisable et est engendré par

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbb{P}^3 = \mathrm{Proj}\mathbb{C}[X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_0X_1X_2]$ est le seul $\mathbb{P}^3$ de cubiques sur lequel le groupe ci-dessus agisse trivialement le résultat est prouvé lorsque l'extension est galoisienne.

Si l'extension n'est pas galoisienne, on considère sa clôture galoisienne $\pi : X \to \mathbb{P}^2$. C'est un revêtement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié et un revêtement de degré 6 de la cubique image $S$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^2 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \pi^{-1}(S) & \xrightarrow{\pi} & S. \end{array}$$

Comme $X$ est normale l'image inverse $\pi^{-1}(L)$ d'une droite générale de $\mathbb{P}^2$ est irréductible d'après Bertini. On considère la transposition $\sigma$ qui échange les deux points de la fibre par $\pi$ ; l'image par $\pi$ de la courbe $\sigma(\pi^{-1}(L))$ est la courbe irréductible $C$ telle que $p^{-1}(p(L)) = L \cup C$. En effet au dessus de chaque point de $L$ la fibre est constituée des deux points tels que le triplet est la fibre par $p$. Mais ceci contredit le fait que $C$ est formée de deux droites. □

Toute cubique de la surface $\alpha_3^3 - 27\alpha_0\alpha_1\alpha_2 = 0$ est un triangle. Par exemple le pinceau de cubiques (pinceau de Hesse) $(X_0^3 + X_1^3 + X_2^3, X_0X_1X_2)$ contient quatre cubiques singulières (qui sont quatre triangles),

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0X_1X_2 = 0 \\ X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 - 3X_0X_1X_2 = 0 \\ X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 - 3jX_0X_1X_2 = 0 \\ X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 - 3j^2X_0X_1X_2 = 0 \end{array} \right.$$

ce qui prouve d'ailleurs que le lieu des triangles est un lieu triple.

Bien que le phénomène semble spécifique au degré 3, notamment à cause du plongement de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{PGL}(3)$, il apparaît que la parité y joue un rôle spécial. En effet, la surface de Togliatti est une projection de la surface de Veronese $v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)))$ mais elle peut aussi être définie comme section hyperplane générale de la variété de Segre $\mathrm{Seg}(1;3) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1,1)))$. Plus généralement je montre que les espaces $2n$-tangents des projections bien choisies des Veronese $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2n+1)))$ et des sections hyperplanes générales des Segre $\mathrm{Seg}(1;2n+1)$ ont un point commun ([V5], thm. 3.1 et thm. 4.3). Le point clé est la polarité par rapport aux courbes rationnelles normales et par rapport aux produits de $\mathbb{P}^1$ ([4]). Il reste là aussi du travail à faire. Par exemple essayer de démontrer un analogue du théorème de Togliatti pour la surface de Veronese $v_5(\mathbb{P}^2)$. Ce pourrait être un énoncé du type :

**Conjecture 2.** *Hormis quelques exceptions dont on dresse une liste, les seules projections lisses de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$ sur $\mathbb{P}$ dont les hyperplans tangents à l'ordre $n-1$ ont un point commun sont, modulo changement de coordonnées sous $\mathrm{PGL}(3)$, les projections de centre $(l_0^n, \cdots, l_{n-1}^n, \prod l_i)$, où les $l_i$ sont des formes linéaires indépendantes.*

## 2.3 Revêtements doubles du plan

Un revêtement double lisse du plan $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ est caractérisé par sa courbe de ramification d'équation $\{f=0\} \subset \mathbb{P}^2$.

• Lorsque $\deg(f) = 2$ la surface $X$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et le morphisme $\pi$ correspond au produit $(x,y) \mapsto xy$, dont la fibre est $\{(x,y),(y,x)\}$. La courbe de ramification est l'image de la diagonale, notée $D$. On peut remarquer que la situation de deux coniques $n$ Poncelet associées $C$ et $D$ se relève en un cône au dessus de $C$ coupant la quadrique lisse $\mathrm{Seg}(1;2) \subset \mathbb{P}^3$ le long d'une courbe elliptique de degré 4 qui s'envoie sur $D$. Le polygone à $n$ côtés tangents à $D$ se relève en un polygone articulé et fermé à $2n$ côtés, $n$ droites sur le cône et $n$ droites d'une même famille sur $\mathrm{Seg}(1;2)$ ([7], thm. 1.1).

---

[4] Soit $U$ est un espace vectoriel complexe de dimension 2. Notons $\mathrm{Seg}(1;n) \subset \mathbb{P}U^{\otimes n}$ l'image de $\mathbb{P}U \times \cdots \times \mathbb{P}U$ par le plongement de Segre. On vérifie tout d'abord que :

**Lemme 2.2.2** ([V5], lem. 4.1)**.** $\mathrm{Seg}\,(1;n)^{(n-1)\vee} \simeq \mathrm{Seg}\,(1;n)$.

Avec ce lemme nous pouvons décrire une forme de polarité par rapport au Segre, calquée sur la polarité point-hyperplan par rapport aux courbe rationnelles. L'isomorphisme $\mathrm{Seg}\,(1;n)^{(n-1)\vee} \simeq \mathrm{Seg}\,(1;n)$ s'étend aux espaces projectifs ambiants. Et ici aussi il faudra distinguer le cas pair du cas impair.

**Proposition 2.2.3** ([V5], prop. 4.2)**.** *L'isomorphisme $\mathrm{Seg}\,(1;n) \simeq \mathrm{Seg}\,(1;n)^{(n-1)\vee}$ qui à un point du Segre associe l'hyperplan $n$-tangent au Segre en ce point s'étend aux espaces projectifs $\mathbb{P}(U^{\otimes n})$ et $\mathbb{P}(U^{*\otimes n})$ de la manière suivante : Au point $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ on associe le point d'intersection des hyperplans $n$-tangents aux points de $x^\vee \cap \mathrm{Seg}\,(1;n)^{(n-1)\vee}$. Lorsque $n$ est impair, ce point image appartient à $x^\vee$. Lorsque $n$ est pair, les points $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ pour lesquels le point image appartient à $x^\vee$ forment une hyperquadrique.*

• Lorsque $\deg(f) = 4$ la surface $X$ est isomorphe à une cubique lisse de $\mathbb{P}^3$ éclatée en un point (ou encore $\mathbb{P}^2$ éclaté en 7 points). Comme j'étudierai, dans la dernière partie, les fibrés vectoriels obtenus par image directe des faisceaux inversibles sur cette surface, je rappelle cette construction maintenant.

## Involution de Geiser

Étant donnés sept points en position assez générale dans le plan projectif, on considère l'application rationnelle qui associe, à un huitième point du plan, l'unique pinceau de cubiques passant par les huit points. Si on note $Z = \{x_1, \cdots, x_7\}$ et $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$ une base du réseau de cubiques passant par les sept points $x_i$, l'application est tout simplement

$$\mathbb{P}^2 - -- \to \mathbb{P}^2, x \mapsto ((\Delta_0(x), \Delta_1(x), \Delta_2(x)).$$

Deux cubiques se coupant en 9 points $\{x, y, x_1, \cdots, x_7\}$, les points $x$ et $y$ ont même image et l'application rationnelle est de degré deux (l'involution de Geiser, proprement dite, échange $x$ et $y$). Décrivons précisément l'éclatement du plan le long de ce groupe de points $Z$.

On pose $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V$ et $W = H^0 J_Z(3)$. Écrivons une résolution minimale de cet idéal

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-2) \xrightarrow{M} W \otimes O_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{(\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2)} J_Z(3) \longrightarrow 0$$

où, quitte à fixer des bases, $M = \begin{pmatrix} X_0 & C_0 \\ X_1 & C_1 \\ X_2 & C_2 \end{pmatrix}$. On a donc le plongement suivant

$$\mathbb{P}J_Z \hookrightarrow \mathbb{P}W \times \mathbb{P}V = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2.$$

L'éclatement de $\mathbb{P}^2$ le long de $Z$ est défini dans ce produit par les équations

$$\sum \Delta_i X_i = 0 \text{ et } \sum \Delta_i C_i = 0.$$

L'image d'un point $x \in \mathbb{P}V$ est le pinceau de cubiques passant par ce point $x$ et par $Z$. La courbe des cubiques singulières du réseau $< \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 >$ vue dans l'espace des cubiques est une douzique. Cette douzique possède 28 points doubles correspondant aux 7 cubiques doubles en un des $x_i$ mais aussi aux 21 cubiques décomposées en une droite passant par deux des sept points et une conique passant par les cinq autres. Cette cubique, doublement singulière donne un point double. Chaque point double de la douzique correspond à une bitangente de la courbe duale dans le $\mathbb{P}^2$ des pinceaux de cubiques. On trouve ainsi notre quartique de ramification et ses 28 bitangentes, dont les sept de départ forment un système d'Aronhold, puisqu'elles engendrent les 21 autres (voir [19] chap. 6, pour une définition plus précise d'un système d'Aronhold).

On notera $l_i, i = 1, \cdots, 7$ les bitangentes correspondant aux points $x_i$ pour $i = 1, \cdots, 7$ et $l_{ij}$ celles associées aux choix de deux points $x_i$ et $x_j$ parmi les sept.

La fibre $q^{-1}(\underline{\alpha})$ est définie dans $\mathbb{P}V$ par les équations

$$\sum \alpha_i X_i = 0 \text{ et } \sum \alpha_i C_i = 0.$$

La ramification "en bas" (dans $\mathbb{P}W$) correspond aux points $\underline{\alpha}$ pour lesquels :

$$\sum \alpha_i X_i = 0 \text{ est tangente à la conique d'équation } \sum \alpha_i C_i = 0.$$

Soit $A = (l_{ij})$ la matrice associée à la conique $\sum \alpha_i C_i = \sum l_{ij}(\underline{\alpha}) X_i X_j$ et $\tilde{A}$ sa matrice transposée des cofacteurs. La droite $\sum \alpha_i X_i = 0$ touche la conique d'équation $\sum \alpha_i C_i = 0$ si et seulement si $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ appartient à la conique duale i.e. $< \tilde{A}\underline{\alpha}, \underline{\alpha} >= 0$. C'est l'équation de la quartique de ramification. Cette quartique est lisse en général (i.e. quand les sept points sont en position générale). Bateman ([8], page 360) précise qu'elle a un point double lorsque trois points sont alignés ou six sur une conique, qu'elle est formée de deux coniques lorsque six points sont les sommets de quatre droites etc.

Dans $\mathbb{P}V$, ou encore "en haut", la ramification est définie ensemblistement par

$$\{x \in \mathbb{P}^2 \mid H^0(J_Z \otimes \mathfrak{m}_x^2(3)) \neq 0\}.$$

C'est la sextique d'équation

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_0}{\partial X_0} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_0} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_0} \\ \frac{\partial \Delta_0}{\partial X_1} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \Delta_0}{\partial X_2} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} = 0.$$

Elle est, par définition, birationnelle à la ramification "en bas", c'est à dire à la quartique ; elle est donc irréductible et possède 7 points doubles d'après le théorème d'Hurwitz ([30], chap. IV cor. 2.4).

## 2.4 Variétés d'incidence

Je termine ce chapitre par quelques mots sur les variétés d'incidence. Il me semble que j'abuse parfois de ce formalisme en promenant mes faisceaux et fibrés de droite à gauche et vice versa. Mais ce genre de promenade permet par exemple d'expliquer le "reduction step" de Maruyama dans $\mathbb{P}^n$ (qu'il appelle "elementary transform", [44], page 381) à partir de suites exactes très simples sur l'espace dual (voir par exemple ce que j'appelle "suites de liaison" dans [V2], [V9] et [V10]).

L'ensemble des sous-variétés linéaires de $\mathbb{P}^n$ de dimension $k$, $1 \leq k \leq n$ est la grassmanienne des $k$-plans notée $G(k,n)$. Elle est plongée dans $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ par le système de coordonnées de Plucker. On note $h \in G(k,n)$ le point correspondant au $k$-plan $H \subset \mathbb{P}^n$. On définit l'incidence

$$\mathbb{F} = \{(x,h), x \in H, h \in G(k,n)\}.$$

C'est une sous-variété du produit $\mathbb{P}^n \times G(k,n)$, elle hérite à ce titre des morphismes de projections $p$ et $q$ sur chacun des facteurs. On a un diagramme, dit diagramme d'incidence

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & G(k,n) \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ \mathbb{P}^n & & \end{array}$$

Dans ce texte je considèrerai le cas $k = n-1$ c'est-à-dire $G(n-1,n) = \mathbb{P}^{n\vee}$.

La variété d'incidence points-hyperplans permet de construire aisément des revêtements finis de $\mathbb{P}^n$. En effet, étant donnée une courbe intègre non dégénérée $X \in \mathbb{P}^{n\vee}$, son image inverse $q^{-1}(X)$ est un revêtement de degré $\deg(X)$ de $\mathbb{P}^n$ ramifié au-dessus de la variété duale

$$X^\vee = \overline{\{x \in \mathbb{P}^n, x^\vee \text{ touche } X\}}.$$

Par exemple on retrouve le revêtement $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ ramifié au-dessus d'une conique $D$ en prenant l'image inverse de $D^\vee \subset \mathbb{P}^2$.

Enfin, pour faire la transition avec le chapitre suivant, on vérifie sans difficulté que pour une variété intègre donnée $X \subset \mathbb{P}^n$ et une sous variété linéaire $L \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ l'intersection $p^{-1}(X) \cap q^{-1}(L)$ domine $X$ et les fibres par $p$ sont des espaces projectifs de dimension $\dim(L) - 1$ si et seulement si $L \cap X^\vee = \emptyset$. Autrement dit, si $L \cap X^\vee = \emptyset$ alors $p^{-1}(X) \cap q^{-1}(L)$ est un fibré projectif au-dessus de $X$.

# Chapitre 3

# Fibrés vectoriels

Dans un premier temps (partie 3.1) je reviens sur une construction élémentaire de fibrés projectifs sur une variété $X$ intègre, plongée dans un espace projectif. Via cette construction j'introduis les fibrés de Steiner sur un espace projectif en prenant pour $X$ une variété de Segre et en insistant sur le lien avec la non nullité de l'hyperdéterminant de Cayley (partie 3.2). Après avoir rappelé le théorème de type Torelli pour les fibrés logarithmiques j'en propose un, sur le plan, pour les fibrés logarithmiques généralisés (partie 3.3). Je me penche ensuite sur une famille de fibrés de Steiner invariante sous l'action de $\mathrm{PGL}(n)$. Ceci conduira à une présentation succinte des variétés d'Alexander-Hirschowitz (partie 3.4). Puis je termine en considérant le cas $n = 2$ et les fibrés de Schwarzenberger correspondants (partie 3.5). Dans chacune des parties, sauf peut-être la première, des résultats nouveaux sont présentés. Quant à la première il s'agit surtout d'une reformulation de résultats bien connus mais grâce à elle nous calculons aisément le degré des variétés duales de quelques variétés de Segre (en particulier de l'hyperdéterminant).

## 3.1 Construction élémentaire

Un fibré vectoriel n'est après tout qu'une famille bien organisée d'espaces vectoriels (même rang et qui se recollent comme il faut). Cette approche permet de construire de nombreux fibrés par le contrôle de la dimension des espaces vectoriels qui interviennent. C'est ce que nous appliquons dans cette première partie.

Étant donnée $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété projective que l'on suppose intègre, nous notons $X^\vee$ (et l'appelons la variété duale de $X$) la clôture de Zariski dans $\mathbb{P}^{N\vee}$ de l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^N$ contenant l'espace tangent de $X$ en un point lisse. Plus précisément, si $T_xX$ est l'espace tangent (projectif) de $X$ en un point lisse $x$, et $X^{sm}$ l'ouvert des points lisses de $X$, nous avons

$$X^\vee := \overline{\{H \in \mathbb{P}^\vee \mid \exists x \in X^{sm}, T_xX \subset H\}}.$$

**Rappel 3.1.1.** *Quand* $X = X_1 \times X_2$ *est le produit de deux variétés, l'espace tangent en un point lisse* $(x_1, x_2)$ *est l'espace projectif engendré par*

$$(T_{x_1}X_1) \times \{x_2\} \cup \{x_1\} \times (T_{x_2}X_2).$$

Considérons la variété d'incidence (point,hyperplan) de $\mathbb{P}^N$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{P}^{N\vee} \\ \mathbb{P}^N & \end{tikzcd}$$

Soient $X$ une sous variété non dégénérée et lisse de $\mathbb{P}^N$, $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}^{N\vee}$ une sous-variété linéaire dans l'espace dual et $\mathfrak{X} = p^{-1}X \cap q^{-1}\mathbb{P}W \subset \mathbb{F}$ l'intersection des images inverses. On note encore $p$ et $q$ les morphismes de projection de $\mathfrak{X}$ sur $X$ et sur $\mathbb{P}W$. Et nous obtenons une résolution de $\mathfrak{X}$ en tant que sous-variété de $X \times \mathbb{P}W$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times\mathbb{P}W}(-1,-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times\mathbb{P}W} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow 0.$$

Le lieu $\mathfrak{X}$ est une section hyperplane de $\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}W)$ dans $\mathbb{P}(V \otimes W)$ où $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^N$. Nous identifions $\mathfrak{X}$ avec le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{P}(V \otimes W)$. À un point de $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}^{N\vee}$ correspond un hyperplan de $\mathbb{P}^N$. Et la fibre au dessus d'un point de $\mathbb{P}W$ est une section hyperplane de $X$ par l'hyperplan correspondant. Quand $X$ n'est pas une variété linéaire $\mathfrak{X}$ n'est pas un fibré projectif au dessus de $\mathbb{P}W$. La fibre au dessus de $x \in X$ est une section hyperplane de $\mathbb{P}W$ par l'hyperplan $x^\vee$. Nous avons alors :

**Théorème 3.1.2.** *Soient* $X$ *une sous-variété intègre de* $\mathbb{P}^N$ *et* $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}^{N\vee}$*.*
*Alors les énoncés sont équivalents :*
*i)* $\mathfrak{X}$ *est un fibré projectif au dessus de* $X$*.*
*ii)* $X \cap (\mathbb{P}W)^\vee = \emptyset$*.*
*iii)* $\dim(\mathbb{P}W) \geq \dim X$ *et* $\mathfrak{X} \notin \mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}W)^\vee$*.*

*Démonstration.* Par construction il est clair que $\mathfrak{X}$ est un fibré projectif sur $X$ si et seulement si pour tout $x \in X$ les fibres sont des espaces projectifs de même dimension. Comme $p^{-1}(x) \simeq x^\vee \cap \mathbb{P}W$ ceci implique que pour tout $x \in X$ l'espace projectif $x^\vee \cap \mathbb{P}W$ est un hyperplan de $\mathbb{P}W$ et non pas $\mathbb{P}W$ tout entier. Autrement dit, il n'existe pas de point $x \in X$ pour lequel $\mathbb{P}W \subset x^\vee$, ou de façon équivalente $x \in (\mathbb{P}W)^\vee$. Ceci prouve $i) \Leftrightarrow ii)$.

Nous supposons que $X \cap (\mathbb{P}W)^\vee = \emptyset$. On a alors $\dim\mathbb{P}W \geq \dim X$. On note $\Phi$ l'application linéaire $V \otimes W \to \mathbb{C}$ ou bien l'application $V \to W^*$ correspondant à $\mathfrak{X}$. Cette hypothèse implique que pour tout $x \in X$ la forme linéaire $\Phi(x)$ : $W \to \mathbb{C}$ n'est pas partout nulle. Ceci prouve que l'hyperplan $\Phi = 0$ n'est pas tangent à $\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}W)$ (conférer le rappel sur les produits d'espaces tangents).

Réciproquement s'il existe $x \in X \cap (\mathbb{P}W)^\vee$ et $\dim(\mathbb{P}W) \geq \dim(X)$ nous devons trouver $z \in \mathbb{P}W$ telle que le noyau de la forme linéaire $\Phi(z) : V \to \mathbb{C}$

contienne $\mathbb{P}(T_xX)$. Soient $r = \dim(X)$ et $(x_0, \cdots, x_r)$ une base de $T_xX$. Comme $\Phi(\sum \lambda_i x_i) = \Phi(x) = 0$ le sous-espace vectoriel $\bigcap_{i=0}^{i=r} \ker\Phi(x_i) \subset W$ possède un vecteur non nul $z$. $\square$

Nous supposerons donc à partir de maintenant que $\dim X \leq \dim \mathbb{P}W$ et que $\mathfrak{X} = \mathbb{P}(\mathcal{S})$ est un fibré projectif sur $X$. Nous avons alors :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\Phi} W \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Nous avons vu dans le théorème 3.1.2 précédent qu'une forme multilinéaire générale $\Phi$ induit un fibré vectoriel sur $X$ si et seulement si pour tout $x \in X$ on a $\Phi(x) \neq 0$. Générale, ici, signifiant en dehors de l'ensemble fermé $\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}W)^\vee$. Fermé dont nous donnons le degré (en fonction du degré de $X$) et la codimension ci-dessous.

**Proposition 3.1.3.** *Soient* $r = \dim X$ *et* $\dim \mathbb{P}W = r + k$ *avec* $k \geq 0$. *On a,*
*(i)* $\mathrm{codim}(\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}W))^\vee = k + 1$.
*(ii)* $\deg(\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}W))^\vee = \deg(\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}^{k+1}))$.

*Démonstration.* Soient $(\Phi_0, \cdots, \Phi_{k+1})$ des formes linéaires générales sur $V \otimes W$. On considère l'application :

$$W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{k+1} \times X} \xrightarrow{\sum X_i \Phi_i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{k+1} \times X}(1, 1).$$

Comme la codimension de $\mathbb{P}(W)^\vee$ est exactement $r + k + 1$, cet espace rencontre la variété $\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}^{k+1})$ le long d'un schéma fini de longueur égale au degré de $\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}^{k+1})$. Soit $(a_0, \cdots, a_{k+1}; x)$ un point d'intersection. La forme linéaire $\sum a_i \Phi_i$ s'annule identiquement au point $x \in X$, donc d'après le théorème précédent il est tangent à $\mathrm{Seg}(X, \mathbb{P}W)$. $\square$

## 3.2 Fibrés de Steiner

La donnée d'une matrice carrée de nombres complexes $A = (a_{i,j})$ de dimension $(n + 1) \times (n + 1)$ équivaut à la donnée du fibré tangent sur $\mathbb{P}^n$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$. En effet le noyau de l'application

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^n \xrightarrow{(x_0, \cdots, x_n)A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1),$$

est le fibré tangent si et seulement si l'application est surjective, c'est-à-dire si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Il est bien connu que la variété duale de la variété de Segre $\mathrm{Seg}(n, n) \subset \mathbb{P}^{n^2-1}$ est une hypersurface définie par l'annulation du déterminant de la matrice générique $(n + 1) \times (n + 1)$. Aussi une matrice $A$ donnera le fibré tangent si et seulement si le point correspondant $[A] \in \mathbb{P}^{n^2-1\vee}$ n'appartient pas à $\mathrm{Seg}(n, n)^\vee$.

On peut aussi remarquer que la donnée d'une matrice rectangulaire $A = (a_{i,j})$ de dimension $(n + 1) \times (n + 1 + k)$ correspond à la donnée d'un fibré vectoriel si et seulement s'il existe une sous matrice carrée dont le déterminant est non nul. Il est aisé de vérifier que ce fibré est une somme directe du fibré tangent et de copies du faisceau trivial sur $\mathbb{P}^n$.

Plus généralement la donnée d'une multimatrice $A = (a_{i,j,k})$ de dimension $(n+1) \times (m+1) \times (n+m+1)$ équivaut à la donnée d'un fibré vectoriel de rang $n$ sur $\mathbb{P}^n$ si et seulement si l'hyperdéterminant de Cayley $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ ([27], chap. 14 prop. 1.1). En effet il s'agit du noyau de l'homorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+m+1} \xrightarrow{(A_{i,j,0}\overrightarrow{x},\cdots,A_{i,j,n+m}\overrightarrow{x})} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{m+1}(1).$$

Par ailleurs cette multimatrice induit aussi une fibré de rang $m$ sur $\mathbb{P}^m$ (que Dolgachev et Kapranov appellent fibré associé). En effet il s'agit du noyau de l'homorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}^{n+m+1} \xrightarrow{(\overrightarrow{y}A_{i,j,0},\cdots,\overrightarrow{y}A_{i,j,n+m})} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}^{n+1}(1).$$

Comme pour les matrices carrées on vérifie que $\mathrm{Det}(A) = 0$ est l'équation dans $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)(n+m+1)-1}$ de la variété $\mathrm{Seg}(n, m, n+m)^{\vee}$. Nous aurons alors deux fibrés induits par la multimatrice $A$ si et seulement si $[A] \notin \mathrm{Seg}(n, m, n+m)^{\vee}$.

Par analogie avec le cas précédent on peut montrer qu'une multimatrice $A = (a_{i,j,k})$ de dimension $(n+1) \times (m+1) \times (n+m+1+k)$ définit de cette manière deux fibrés si et seulement s'il existe une matrice extraite de dimension $(n+1) \times (m+1) \times (n+m+1)$ dont l'hyperdéterminant est non nul. Par contre les fibrés induits ne sont pas en général une somme directe de fibrés de rangs plus petits (penser par exemple aux puissances symétriques du fibré tangent).

Les fibrés obtenus de cette manière sont appelés **fibrés de Steiner** par Dolgachev et Kapranov ([22], chap. 3). Ces fibrés, parce qu'ils sont définis par des matrices de formes linéaires, sont les plus simples des fibrés vectoriels que l'on peut rencontrer. Par ailleurs sur le plan projectif, pour des classes de Chern appropriées, ils forment une famille dense dans l'espace de modules. Sur des espaces projectifs de dimension plus grande que deux, l'espace des modules n'est plus connexe mais ils sont denses dans leur composante.

La première remarque fondamentale est qu'un fibré de Steiner $S$ sur $\mathbb{P}^n$ dont la résolution est de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^2(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{2+n} \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

est le fibré des $\mathbb{P}^{n-1}$ qui sont $n$-sécants à une courbe rationnelle normale $C_{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ ([22], prop. 6.8). En effet ce fibré est défini par une matrice $A = (a_{i,j,k})$ de dimension $2 \times (n+1) \times (n+2)$. Il correspond ainsi à la donnée d'une matrice de formes linéaires sur $\mathbb{P}^{n+1}$ de dimension $2 \times (n+1)$ dont les deux mineurs définissent $C_{n+1}$. Ces fibrés qui débutent la liste des fibrés de Steiner de rang $n$ sur $\mathbb{P}^n$ furent introduits en 1963 par Schwarzenberger dans l'article [58].

On notera dorénavant $\mathrm{St}(m, n+k, n)$ l'ensemble des fibrés de Steiner de rang $n+k$ sur $\mathbb{P}^n$ dont la résolution est

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^m(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{m+n+k} \longrightarrow S \longrightarrow 0.$$

Avant le cas des fibrés de Schwarzenberger qui appartiennent à l'espace de modules $\mathrm{St}(2,n,n)$, il faut citer le cas du fibré tangent :

**Exemple 3.2.1.** *Le fibré tangent, défini par la suite d'Euler*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0$$

*est un fibré de Steiner.*

Pour obtenir un fibré vectoriel il faut qu'il existe une sous-multimatrice dont l'hyperdéterminant soit non nul. La multimatrice $A_{i,j,k}$ n'est pas cubique. Par conséquent même dans le cas le plus favorable conduisant aux fibrés de rang $n$ sur $\mathbb{P}^n$ et $m$ sur $\mathbb{P}^m$ la multimatrice est associée à un faisceau sur $\mathbb{P}^{n+m}$ singulier le long d'une sous-variété définie par les mineurs de la matrice :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+m}}^{n+1} \xrightarrow{(A_{0,j,k}\overrightarrow{z},\cdots,A_{n,j,k}\overrightarrow{z})} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+m}}^{m+1}(1).$$

Quitte à supposer $m \geq n$ la suite exacte précédente est généralement injective et son conoyau est un faisceau singulier le long du sous-schéma défini par le zéroième idéal de Fitting de l'application. Une stratification est possible suivant celle naturelle des idéaux de Fitting :

$$Z(F^n(\Phi)) \subset \cdots \subset Z(F^0(\Phi)).$$

Le schéma $Z(F^i(\Phi))$ est défini par l'annulation des mineurs $(n+1-i)\times(n+1-i)$. Par hypothèse $Z(F^n(\Phi)) = \emptyset$ sinon la matrice n'est pas injective. Par contre les mineurs $2\times 2$ peuvent s'annuler simultanément. Lorsque la matrice est persymétrique (ou de Hankel) ils s'annulent le long d'une courbe rationnelle normale. Ils peuvent s'annuler sur un ensemble fini de points. On montre alors que cet ensemble de points est de longueur majorée par $n+m+2$ sauf si les points sont sur une courbe rationnelle normale auquel cas le fibré est de Schwarzenberger. Le cas limite $\sharp Z(F^{n-1}(\Phi)) = n+m+2$ est réalisé par les fibrés logarithmiques que nous introduisons ci-après.

L'application $\Phi$ induit aussi un plongement $\mathbb{P}^{n+m+1} \subset \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$. Ces idéaux de Fitting décrivent les intersections de $\mathbb{P}^{n+m+k}$ et des variétés sécantes du Segre $\mathrm{Seg}(n,m)$. Ensemblistement, on a $Z(F^{n-i}(\Phi)) = \mathbb{P}^{n+m+1} \cap \mathrm{Sec}^i(\mathrm{Seg}(n,m))$, en particulier les mineurs $2\times 2$ correspondent à l'intersection $Z(F^{n-1}(\Phi)) = \mathbb{P}^{n+m+k} \cap \mathrm{Seg}(n,m)$. Considérons alors le cas d'un fibré $S \in \mathrm{St}(2,n,n)$. Il correspond au plongement $\mathbb{P}^{n+1} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$. Ces espaces $\mathbb{P}^{n+1}$ et $\mathrm{Seg}(1,n)$ se rencontrent au moins le long d'une courbe pour des raisons de dimension. Cette courbe est une courbe rationnelle normale de degré $(n+1)$.

## Fibrés sur les Segre

Revenons à la construction élémentaire précédente afin de l'appliquer aux fibrés de Steiner. Soient $n,m,k$ trois entiers tels que $k \geq 0$ et $1 \leq n \leq m$. Afin d'obtenir un fibré vectoriel sur le Segre $\mathrm{Seg}(n,m) \hookrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ (conférer 3.1.2 iii)) on suppose que $k \geq 0$. On considère le diagramme d'incidence

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{n+m+k} \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ \mathrm{Seg}(n,m) & & \end{array}$$

La variété $\mathfrak{X} \subset \mathrm{Seg}(n,m,n+m+k)$ est une section de $\mathrm{Seg}(n,m,n+m+k)$ par un hyperplan de $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)(n+m+k)-1}$ ; elle est définie par une forme trilinéaire $\Phi = \sum_{i,j,k} a_{i,j,k} X_i Y_j Z_k$.

Soient $V, I, W$ trois espaces vectoriels tels que $\mathbb{P}V = \mathbb{P}^n, \mathbb{P}I = \mathbb{P}^m$ et $\mathbb{P}W = \mathbb{P}^{n+m+k}$. La forme linéaire $\Phi$ peut s'écrire $\Phi : V^* \otimes I^* \otimes W^* \to \mathbb{C}$ ou $\Phi : V^* \otimes I^* \to W$. On a alors les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}V\times\mathbb{P}I\times\mathbb{P}W}(-1,-1,-1) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}V\times\mathbb{P}I\times\mathbb{P}W} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}V\times\mathbb{P}I}(-1,-1) \xrightarrow{\Phi} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}V\times\mathbb{P}I} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow I^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(-1) \xrightarrow{\Phi} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}V} \longrightarrow S_V \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}I}(-1) \xrightarrow{\Phi} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}I} \longrightarrow S_I \longrightarrow 0.$$

Nous récrivons le théorème 3.1.2 dans ce cas particulier.

**Théorème 3.2.2.** *Soient $V$, $I$, $W$ et $\Phi$ définis comme ci-dessus. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
*1) Pour tous vecteurs non nuls $x \in V^*$ et $y \in I^*$, $\Phi(x \otimes y) \neq 0$.*
*2) $(\mathbb{P}W)^\vee \cap \mathrm{Seg}(\mathbb{P}V, \mathbb{P}I) = \emptyset$.*
*3) $\mathcal{S}$ est un fibré vectoriel (de rang $n+m+k$) au dessus de $\mathrm{Seg}(\mathbb{P}V, \mathbb{P}I)$.*
*4) $S_V$ est un fibré de Steiner (de rang $n+k$) au dessus de $\mathbb{P}V$.*
*5) $S_I$ est un fibré de Steiner (de rang $m+k$) au dessus de $\mathbb{P}I$.*
*6) $\Phi \notin \mathrm{Seg}(\mathbb{P}V, \mathbb{P}I, \mathbb{P}W)^\vee$.*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est essentiellement la même que celle du théorème 3.1.2, mais étant donnée l'importance accordée aux fibrés de Steiner dans ce texte nous préférons la répéter.

On choisit pour $\Phi$ l'écriture $\Phi : V^* \otimes I^* \to W$. Soient $x \in V^*$ et $y \in I^*$, alors $\Phi(x \otimes y)$ est une forme linéaire sur $W$, i.e.

$$\Phi(x \otimes y) : W^* \to \mathbb{C}, z \mapsto \Phi(x \otimes y)(z).$$

Les ensembles $H_{x,y} = \{z \in W^*, \Phi(x \otimes y)(z) = 0\}$ sont des hyperplans de $W^*$ si $\Phi(x \otimes y) \neq 0$ et remplissent $W^*$ si $\Phi(x \otimes y) = 0$. Il est clair alors que 1), 2) et 3) sont équivalents.

Soient $\{y_1, \cdots, y_{m+1}\}$ une base de $I^*$ et $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ une base de $V^*$. Pour un $x \in V^*$ fixé et $y \in I^*$ fixé nous définissons les ensembles

$$H_x = \cap_{i=1}^{m+1} H_{x,y_i}, \ H_y = \cap_{j=1}^{n+1} H_{x_j,y}.$$

La dimension attendue pour $H_x$ est $n+k$. Si la dimension est $n+k$ pour tout $x \in V^*$ nous avons un fibré vectoriel de rang $n+k$ au dessus de $\mathbb{P}V$. Supposons que $\dim_{\mathbb{C}} H_x > n+k$, alors les $m+1$ hyperplans ne sont pas linéairement independants, ou au moins un de ces ensembles n'est pas un hyperplan. Dans les deux cas nous avons une famille non nulle de nombres complexes tels que $\sum a_i \Phi(x \otimes y_i) = 0$ ; alors $\Phi(x \otimes \sum a_i y_i) = 0$, ce qui prouve l'équivalence entre 3) et 4). La même chose est vraie pour 3) et 5).

Par hypothèse $\Phi \in \mathbb{P}(V \otimes I \otimes W)$. Le point $\Phi$ appartient à $(\mathbb{P}V \times \mathbb{P}I \times \mathbb{P}W)^\vee$ si et seulement si l'hyperplan $\Phi$ dans $\mathbb{P}(V^* \otimes I^* \otimes W^*)$ contient un espace tangent en un point $x_0 \otimes y_0 \otimes z_0$. Mais l'espace tangent d'un produit est l'espace engendré par les espaces tangents de chaque composante du produit. Dans notre cas, c'est l'espace projectif engendré par $\{x_0 \otimes y_0\} \times \mathbb{P}(W^*)$, $\{x_0 \otimes z_0\} \times \mathbb{P}(I^*)$ et $\{y_0 \otimes z_0\} \times \mathbb{P}(V^*)$. En d'autres mots, $\Phi \in (\mathbb{P}V \times \mathbb{P}I \times \mathbb{P}W)^\vee$ si et seulement s'il existe $x_0 \otimes y_0 \otimes z_0 \in V^* \otimes I^* \otimes W^*$ tel que

$$\forall y \in I^*, \forall x \in V^*, \forall z \in W^*, \Phi(x_0 \otimes y)(z_0) = \Phi(x \otimes y_0)(z_0) = \Phi(x_0 \otimes y_0)(z) = 0.$$

Maintenant pour prouver l'équivalence entre 1) et 6) il suffit de montrer que si $\Phi(x_0 \otimes y_0)(z) = 0$ pour tout $z \in W^*$ alors il existe $z_0 \in W^*$ tel que

$$\forall y \in I, \forall x \in V, \Phi(x_0 \otimes y)(z_0) = \Phi(x \otimes y_0)(z_0) = 0.$$

Mais nous avons déjà vérifié que $\Phi(x_0 \otimes y_0) = 0$ est équivalent à $\dim_{\mathbb{C}} H_{x_0} > n+k$ et $\dim_{\mathbb{C}} H_{y_0} > m+k$. Comme $k \geq 0$, l'intersection $H_{x_0} \cap H_{y_0}$ contient un vecteur non nul $z_0$. □

**Proposition 3.2.3.** *Soit $k \geq 0$. On a,*
*(i)* $\operatorname{codim}(\operatorname{Seg}(n, m, n+m+k)^\vee) = k+1$.
*(ii)* $\deg(\operatorname{Seg}(n, m, n+m+k)^\vee) = \frac{(n+m+k+1)!}{(k+1)!n!m!}$.

*Démonstration.* C'est une reformulation de la proposition 3.1.3. □

Lorsque $k = 0$ la variété duale est une hypersurface et une équation est donnée par l'hyperdéterminant. En particulier on en déduit le degré de l'hyperdéterminant.

Lorsque $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ et $n_1 + n_2 \geq n_3$ la variété $\operatorname{Seg}(n_1, n_2, n_3)^\vee$ est une hypersurface définie aussi par l'annulation de l'hyperdéterminant mais le calcul du degré s'avère plus délicat à obtenir. Une très belle formule est proposée par Gelfand, Kapranov et Zelevinski ([27], thm. 2.4).

## 3.3 Fibrés logarithmiques

Ces fibrés sont importants car ils sont associés (d'une manière que nous rappelons) aux arrangements d'hyperplans et cette association est génériquement injective. Or un arrangement d'hyperplans est un objet fondamental qui intervient dans des domaines aussi divers que la topologie algébrique, l'analyse complexe, la géométrie différentielle etc. Le théorème d'injectivité générique de Dolgachev et Kapranov ([22], thm. 7.2 ainsi que [V3], thm. 3.1) que nous désignerons du nom de théorème de Torelli est donc un résultat crucial. C'est aussi pourquoi après une présentation générale je reviens sur ce théorème et j'en donne, sur le plan projectif, une généralisation en rang plus grand.

Soit $\mathcal{H} = \{H_0, \cdots, H_{n+m+1}\}$ un arrangement de $n+m+2$ hyperplans de $\mathbb{P}^n$. Soit $\{f=0\}$ l'équation de la réunion d'hyperplans $H_0 \cup \cdots \cup H_{n+m+1}$. On note $J_f$ l'idéal jacobien de $f$ engendré par les $n+1$ dérivées partielles $(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. On a alors une application canonique surjective :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1} \longrightarrow J_f(n+m+1).$$

Son noyau, noté $T(\log(f))$ est le faisceau (de rang $n$) des dérivations nulles ([20], page 8). Lorsque les hyperplans sont en position linéaire générale ce faisceau est un fibré vectoriel ([20], prop. 3.2 ; Dolgachev parle alors d'arrangement générique). Il est associé à l'arrangement d'hyperplans et son dual (tordu par $-1$) est appelé **fibré logarithmique** ; il est noté $\Omega(\log(f))$ et on montre qu'il apparaît comme extension

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \Omega(\log(f)) \longrightarrow \oplus_{i=1,\cdots,n}\mathcal{O}_{H_i} \longrightarrow 0.$$

En effet, la réunion des hyperplans est une section globale non nulle du faisceau d'idéaux $J_f(n+m+2)$. Cette section induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) & = & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow f & & \\
0 & \longrightarrow & T(\log(f)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1} & \longrightarrow & J_f(n+m+1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T(\log(f)) & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^n}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Le faisceau $J_f$ est le faisceau d'idéaux du lieu singulier de l'hypersurface $\{f=0\}$ considéré sur l'hypersurface. Ce diagramme existe même lorsque les hyperplans ne sont pas en position linéaire générale. Lorsqu'ils sont en position linéaire générale la suite exacte duale de la dernière ligne du diagramme est celle annoncée.

Par ailleurs, Dolgachev et Kapranov ont vérifié que ces fibrés logarithmiques sont des fibrés de Steiner ([22], thm. 3.5). J'en propose ci-dessous une nouvelle démonstration qui passe par l'espace dual $\mathbb{P}^{n\vee}$ et par la variété d'incidence $\mathbb{F}$ point-hyperplan de $\mathbb{P}^n$. Plus précisément on vérifie que les fibrés logarithmiques proviennent des faisceaux d'idéaux de points, puis qu'ils sont naturellement des fibrés de Steiner.

**Théorème 3.3.1.** *Soient $Z$ un groupe de $n+m+2$ points en position linéaire générale dans $\mathbb{P}^{n\vee}$ et $\{f=0\}$ une équation de l'arrangement d'hyperplans correspondant dans $\mathbb{P}^n$. Alors $p_*q^*J_Z(1) \in \mathrm{St}(m+1,n,n)$ et plus précisément $p_*q^*J_Z(1) = T(\log(f))$.*

*Démonstration.* La position linéaire générale de $Z$ implique $R^1p_*q^*J_Z(1) = 0$. On en déduit qu'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow p_*q^*J_Z(1) \longrightarrow H^1(J_Z)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^1(J_Z(1))\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent $p_*q^*J_Z(1) \in \mathrm{St}(m+1,n,n)$.

Pour montrer qu'il s'agit bien du fibré logarithmique le point crucial est la surjectivité de l'homomorphisme $T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \oplus_i \mathcal{O}_{H_i}$ qui est la somme des $n+m+2$ morphismes $T_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{H_i}$ ; surjectivité que l'on obtient sous l'hypothèse de position linéaire générale. Chacun de ces homomorphismes se factorise naturellement par la restriction à $H_i$, et ainsi $T_{\mathbb{P}^n}(-1)\otimes\mathcal{O}_{H_i} = \mathcal{O}_{H_i}\oplus T_{H_i}(-1)$. Le faisceau $Hom(T_{H_i}(-1), \mathcal{O}_{H_i})$ n'ayant pas de section globale l'homomorphisme de départ est unique (donné par $\mathcal{O}_{H_i} \to \mathcal{O}_{H_i}$). Par conséquent le noyau $T(\log(f))$ est unique. En considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow J_Z(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n\vee}}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(1) \longrightarrow 0$$

il apparaît que ce noyau est bien $p_*q^*J_Z(1)$. □

Ce dernier énoncé suggère de considérer les faisceaux $p_*q^*J_Z(k), k \geq 1$ qui généralisent en un certain sens les fibrés logarithmiques. Ils s'intègrent dans des extensions naturelles :

$$0 \longrightarrow S^k(\Omega_{\mathbb{P}^n})(k-1) \longrightarrow \Omega_k(\log(f)) \longrightarrow \oplus_{i=1,\cdots,n}\mathcal{O}_{H_i} \longrightarrow 0.$$

J'énonce sur le plan projectif un théorème de type Torelli pour ces fibrés. Pour simplifier l'écriture des énoncés, lorsque $Z$ est le groupe de points correspondant aux hyperplans de $\{f=0\}$, je noterai $\Omega(log(f)) = E(Z)$ et $\Omega_k(log(f)) = E_k(Z)$.

**Théorème 3.3.2** ([V10], thm. 6.4)**.** *Soient $Z$ et $Z^{'}$ deux groupes de points de $\mathbb{P}^{2\vee}$ de même longueur et ne possèdant pas de $k+2$ sécante. On suppose $E_k(Z) \simeq E_k(Z^{'})$. Alors un des deux cas suivants se produit :*
*1) $Z = Z^{'}$.*
*2) $Z$ et $Z^{'}$ sont sur une même courbe $X_{k+1}$ de degré $k+1$ et il existe un faisceau $\mathcal{L}$ de rang 1 sur $X_{k+1}$ tel que $E_k(Z) \simeq p_*q^*(\mathcal{L})$ où $p$ et $q$ sont les morphismes de projections de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^{2\vee}$ restreints à $q^{-1}(X_{k+1})$.*

Cet énoncé est l'analogue pour les fibrés logarithmiques généralisés du plan du théorème de "Torelli" suivant :

**Théorème 3.3.3** ([22], thm. 7.2 pour $k \geq 2n+3$, et [V3], cor. 3.1 pour $k \geq n+2$)**.** *Soient $Z$ et $Z^{'}$ deux groupes de points de longueur $k \geq n+2$ en position linéaire générale dans $\mathbb{P}^{n\vee}$. On suppose que l'on a $E(Z) \simeq E(Z^{'})$. Alors, un des deux cas suivants se produit :*
*1) $Z = Z^{'}$.*
*2) $Z$ et $Z^{'}$ sont sur une même courbe rationnelle normale $C_n$ et $E(Z)$ est le fibré de Schwarzenberger associé à $C_n$, noté $E_{2,k-2}(C_n)$.*

La preuve de ce théorème reposait sur deux idées :
1) le fibré $T(\log(f))$ restreint aux hyperplans de $Z$ possède une section partout non nulle (on dit qu'ils sont instables).
2) Sur $\mathbb{P}^n$, $n+3$ points en position linéaire générale sont sur une unique courbe rationnelle normale.

Les fibrés logarithmiques généralisés permettent de considérer des arrangements de droites autres que les génériques. Par exemple on peut associer un fibré de rang $n$ à un arrangement de droites au sein duquel existe des concours de $n$ droites (au plus). Dans $\mathbb{P}^2$ mon intuition est que les faisceaux extensions par $S^k(\Omega_{\mathbb{P}^n})(k-1)$ seront des fibrés si et seulement si par tout sommet de la configuration passent au plus $k$ droites de la configuration.

Une question essentielle n'est pas encore clairement résolue : il s'agit de la position que l'on doit imposer au schéma ponctuel afin d'obtenir un fibré vectoriel. Dans ce cadre plus général ($k > 1$) il n'est plus forcément en position linéaire générale (alors qu'en rang égal à $n$ un point singulier apparaît pour le faisceau extension lorsque la position n'est pas linéaire générale) mais je ne sais pas quand l'extension cesse d'être un fibré vectoriel. Sur le plan projectif le faisceau logarithmique généralisé de rang $n$ associé à un arrangement de droites donné n'est pas un fibré vectoriel si et seulement s'il existe un sommet de la configuration par lequel concourent $n+1$ droites de la configuration. Plus généralement, la réponse réside à mon avis dans la compréhension des conditions nécessaires et équivalentes assurant la surjectivité de l'homomorphsime :

$$S^{r+1}(\Omega_{\mathbb{P}^n}^{\vee}(-1)) \longrightarrow \oplus_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{H_i}.$$

Enfin je recherche un théorème de Torelli pour les fibrés de Steiner de rang plus grand que la dimension de l'espace. Pour les fibrés de Steiner classiques (de rang $n$ sur $\mathbb{P}^n$) il existait un nombre maximal d'hyperplans instables ([1]) réalisé uniquement par les fibrés logarithmiques ; au delà de ce nombre les hyperplans instables étaient les hyperplans osculateurs d'une courbe rationnelle normale. Pour des fibrés de Steiner de rang plus grand que la dimension de l'espace, l'existence de ce nombre maximal n'est pas établie, ni sa réalisation par les seuls logarithmiques généralisés. Le théorème 8.1 de [V10] prouve que ce nombre est maximal pour les logarithmiques généralisés (c'est une sorte de théorème de Torelli pour les logarithmiques généralisés mais pas pour les Steiner). Il reste à prouver qu'un fibré de Steiner de rang et de classes de Chern donnés possèdant le nombre d'hyperplans instables d'un fibré logarithmique de mêmes classes de Chern et même rang ne peut-être qu'un fibré logarithmique généralisé. La clé d'un tel énoncé repose sur le transport du groupe de points $Z \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ dans $\mathbb{P}^n$. Une des difficultés rencontrées est que pour un hyperplan $H$ de l'arrangement associé au fibré de Steiner $E$ de rang plus grand ou égal à $n+1$ l'homomorphisme $E \longrightarrow \mathcal{O}_H$ n'est plus forcément unique (ce qu'il était pour le rang égal à $n$).

[1] Si l'on note $E$ le fibré de Steiner défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^m \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{m+n} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

les hyperplans instables sont les hyperplans $H$ pour lesquels $h^0(E^{\vee} \otimes \mathcal{O}_H) \neq 0$.

### Représentation matricielle des logarithmiques

Revenons maintenant à la description des fibrés de Steiner en termes de fibrés sur les variétés de Segre et appliquons la aux fibrés logarithmiques.

Soit donc $\mathcal{H} = \{H_0, \cdots, H_{n+m+1}\}$ un arrangement de $n+m+2$ hyperplans en position linéaire générale dans $\mathbb{P}^n$. Soient $(X_i)$ les coordonnées sur $\mathbb{P}^n$ et $(b_{ij})$ les nombres complexes tels que $H_j = \sum_{i=0,\cdots,n} b_{ij}X_i$. Comme les hyperplans de $\mathcal{H}$ sont en position linéaire générale il y a exactement $m+1$ relations entre eux, à savoir $H_{n+m+1} = (\sum_{j=0,\cdots,n+m} a_{lj}H_j)_{l=0,\cdots,m}$. Nous introduisons de nouvelles indéterminées $(Y_0, \cdots, Y_m)$ sur $\mathbb{P}^m$ afin d'associer $(n+m+1)$ formes linéaires $K_j = \sum_{l=0,\cdots,m} a_{lj}Y_l$ aux vecteurs des relations $(a_{0j}, \cdots, a_{mj})$. Nous avons encore $n+1$ relations $K_{n+m+1} = (\sum_{j=0,\cdots,n+m} b_{ij}K_j)_{i=0,\cdots,n}$. Comme $\{H_0, \cdots, H_{n+m+1}\}$ sont en position linéaire générale dans $\mathbb{P}^n$ il est clair que les formes linéaires de l'ensemble $\mathcal{K} = \{K_0, \cdots, K_{n+m+1}\}$ sont en position linéaire générale dans $\mathbb{P}^m$.

Nous notons $Z_0, \cdots, Z_{n+m}$ les indéterminées sur $\mathbb{P}^{n+m}$. La forme trilinéaire

$$\Phi = \sum_{i=0,\cdots,n+m} H_iK_iZ_i$$

induit deux fibrés de Steiner $E_n$ sur $\mathbb{P}^n$ et $E_m$ sur $\mathbb{P}^m$ définis par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{m+1}(-1) \xrightarrow{N} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+m+1} \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

où la matrice $N$ est donnée par

$$N = \begin{pmatrix} a_{0,0}H_0 & a_{0,1}H_1 & & a_{0,n+m}H_{n+m} \\ a_{1,0}H_0 & a_{1,1}H_1 & & a_{1,n+m}H_{n+m} \\ \dots & & \dots & \\ a_{m,0}H_0 & a_{m,1}H_1 & \dots & a_{m,n+m}H_{n+m} \end{pmatrix}$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}^{n+1}(-1) \xrightarrow{M} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}^{n+m+1} \longrightarrow E_m \longrightarrow 0$$

où la matrice $M$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} b_{0,0}K_0 & b_{0,1}K_1 & & b_{0,n+m}K_{n+m} \\ b_{1,0}K_0 & b_{1,1}K_1 & & b_{1,n+m}K_{n+m} \\ \dots & & \dots & \\ b_{n,0}K_0 & b_{n,1}K_1 & \dots & b_{n,n+m}K_{n+m} \end{pmatrix}.$$

## 3.4 Fibrés de Steiner invariants sous $\mathrm{SL}(V)$

Je n'aborde ce continent que le long d'une toute petite péninsule, à savoir la multiplication des formes ; toutefois cette construction mène pour $n = 2$ aux fibrés de Schwarzenberger. Si l'on considère des $\mathrm{SL}(V)$-modules plus généraux le champ me paraît essentiellement inexploré, sauf peut-être la belle incursion d'Ottaviani et Rubei [49].

Donc, soit $V$ un $\mathbb{C}$ un espace vectoriel tel que $\dim_{\mathbb{C}} V = r+1 \geq 2$. Nous notons $S_k$ l'espace vectoriel $\mathrm{Sym}^k(V)$ et par $v_k$ l'image de $\mathbb{P}V$ par le morphisme de Veronese $\mathbb{P}(S_1) \hookrightarrow \mathbb{P}(S_k)$. On considère maintenant les applications canoniques, la multiplication $\mu$ des formes et l'application duale $\delta$ qui est la dérivation,

$$S_n \otimes S_m \xrightarrow{\mu} S_{n+m}, \quad S_{n+m} \xrightarrow{\delta} S_n \otimes S_m.$$

Comme ces applications sont $\mathrm{SL}(V)$-équivariantes nous omettons le signe dual pour les espaces vectoriels. Nous définissons un ordre sur la base de $S_k$. Soit $(X_0, \cdots, X_r)$ une base de $V$. Les monômes $\prod_{i=0}^{i=r} X_i^{k_i}$ avec $\sum k_i = k$ formant une base de $S_k$, nous choisissons l'ordre lexicographique sur les partitions de $k$ i.e.

$$(k_0, \cdots, k_r) \leq (l_0, \cdots, l_r) \Leftrightarrow \exists s \mid l_i = k_i \text{ pour } i \leq s, \text{ et } k_{i+1} < l_{i+1}.$$

Enfin, nous notons respectivement par $X_{(n_0,\cdots,n_r)}$, $Y_{(m_0,\cdots,m_r)}$ et $Z_{(s_0,\cdots,s_r)}$ les coordonnées sur $S_n$, $S_m$ et $S_{n+m}$.
Dans ce système de coordonnées la multiplication s'écrit :

$$\mu = \sum_{(n_i)} [\sum_{(m_j)} X_{(n_0,\cdots,n_r)} Y_{(m_0,\cdots,m_r)} Z_{(n_0+m_0,\cdots,n_r+m_r)}].$$

Rappelons le diagramme d'incidence

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}(S_{n+m}) \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ \mathrm{Seg}(s_n, s_m) & & \end{array}$$

La multiplication des monômes correspond à l'addition des $(r+1)$-uplets. On remarque ainsi qu'il n'y a qu'une seule façon d'obtenir $(s_0, \cdots, s_r) = (0, \cdots, n+m, \cdots, 0)$. Cette remarque suffit à prouver que le faisceau $\mathfrak{X}$ est un fibré projectif au dessus de $\mathrm{Seg}(s_n, s_m)$.

**Proposition 3.4.1.** *La multiplication $\mu$ induit trois fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(S_n)$, $\mathbb{P}(S_m)$ et sur $\mathrm{Seg}(s_n, s_m)$.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver que pour tout $x \otimes y \in \mathrm{Seg}(s_n, s_m)$, $\mu(x \otimes y) \neq 0$. Comme $\mu^{-1}(X_i^{n+m}) = \{X_i^n \otimes X_i^m\}$, nous avons

$$X_i^{n+m}(x \otimes y) = 0 \Leftrightarrow X_i^n(x) = 0, \text{ ou } X_i^m(y) = 0.$$

$\square$

La multiplication donne les $\mathrm{SL}(V)$-fibrés suivants sur $\mathbb{P}(S_n) \times \mathbb{P}(S_m)$, $\mathbb{P}(S_m)$ et sur $\mathbb{P}(S_n)$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)\times\mathbb{P}(S_m)}(-1,-1) \longrightarrow S_{n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)} \longrightarrow E_{n+m} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow S_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_m)}(-1) \longrightarrow S_{n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_m)} \longrightarrow E_{m,n+m} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow S_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)}(-1) \longrightarrow S_{n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)} \longrightarrow E_{n,n+m} \longrightarrow 0$$

Le fibré projectif $\mathbb{P}E_{n,n+m}$ au dessus de $\mathbb{P}(S_n)$ est plongé dans $\mathbb{P}(S_n) \times \mathbb{P}(S_{n+m})$ et il est défini par les $s_m$ équations

$$[\sum_{(n_i)|\sum n_i=n} X_{(n_0,\cdots,n_r)} Z_{(n_0+m_0,\cdots,n_r+m_r)}]_{(m_j)|\sum m_j=m} = 0$$

## Variétés osculatrices de la surface de Veronese

Au dessus d'un point général $(x_{(n_0,\cdots,n_r)})_{(n_i)|\sum n_i=n}$ la fibre (espace projectif de dimension $s_{n+m} - s_m - 1$) est définie par les $s_m$ équations

$$[\sum_{(n_i)|\sum n_i=n} x_{(n_0,\cdots,n_r)} Z_{(n_0+m_0,\cdots,n_r+m_r)}]_{(m_j)|\sum m_j=m} = 0.$$

Au-dessus d'un point de la variété de Veronese $v_n$ celle-ci s'interprète en termes d'espaces tangents supérieurs de la variété de Veronese $v_{n+m}$.

**Proposition 3.4.2.** *Au dessus d'un point $(x_0^{n_0} \cdots x_r^{n_r})_{(n_i)|\sum n_i=n}$ la fibre est l'ensemble des hyperplans contenant le $m$-ième espace osculateur de $v_{n+m}$ au point $(x_0^{s_0} \cdots x_r^{s_r})_{(s_k)|\sum s_k=n+m}$.*

*Démonstration.*

$$\partial^{(m_0,\cdots,m_r)}(x_0^{s_0} \cdots x_r^{s_r})_{(s_k)|\sum s_k=n+m} = (x_0^{s_0-m_0} \cdots x_r^{s_r-m_r})_{(s_k)|\sum s_k=n+m}$$

où $x_0^{s_0-m_0} \cdots x_r^{s_r-m_r} = 0$ si $s_k < m_k$. $\square$

Considérons la restriction $\mathfrak{E}_{n,n+m}$ du fibré $E_{n,n+m}$à la Veronese $v_n$, cela donne

$$0 \longrightarrow S_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_1)}(-n) \longrightarrow S_{n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_1)} \longrightarrow \mathfrak{E}_{n,n+m} \longrightarrow 0.$$

Grâce à la proposition précédente nous pouvons interpréter la première flèche comme la matrice des dérivés partielles $m$-ièmes de $S_{n+m}$, et ainsi considérer $\mathfrak{E}_{n,n+m}$ comme le fibré des hypersurfaces de degré $n+m$ sur $\mathbb{P}S_1$ possédant un point singulier d'ordre $\geq m+1$. En d'autres termes la fibre au dessus d'un point $x$ est $H^0(\mathfrak{m}_x^{m+1}(n+m))^\vee$. Cette remarque aura son importance lorsque nous étudierons les fibrés de Schwarzenberger.

**Remarque 3.4.3.** *L'image du fibré projectif $\mathbb{P}\mathfrak{E}_{n,n+m} \subset \mathbb{P}S_1 \times \mathbb{P}S_{n+m}$ par la seconde projection est la variété $m$-osculatrice de $v_{n+m}$.*

Une fois de plus nous passons par la variété d'incidence $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}(S_n) \times \mathbb{P}(S_n)^\vee$ et sa restriction à $v_n$

$$\mathbb{P}(S_n) \xleftarrow{p} q^{-1}(v_n) \xrightarrow{q} v_n.$$

La proposition suivante généralise la définition 1 de [V2].

**Proposition 3.4.4.** $E_{n,n+m} = p_*q^*\mathcal{O}_{v_n}(\frac{n+m}{n})(= p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_1)}(n+m))$.

*Démonstration.* Nous avons la résolution suivante de $q^{-1}(v_n)$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)\times v_n}(-1,-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)\times v_n} \longrightarrow \mathcal{O}_{q^{-1}(v_n)} \longrightarrow 0$$

et via l'isomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{v_n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_1)}(n)$ on obtient

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}S_n\times\mathbb{P}(S_1)}(-1,-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)\times\mathbb{P}(S_1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{q^{-1}(v_n)} \longrightarrow 0.$$

On tensorise par $q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_1)}(n+m)$ et l'on prend l'image directe par $p$ de la suite exacte sur $\mathbb{P}S_n$ pour obtenir

$$0 \longrightarrow S_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)}(-1) \longrightarrow S_{n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)} \longrightarrow E_{n,n+m} \longrightarrow 0.$$

□

**Exemple 3.4.5.** *Soient $(X_0, X_1, X_2)$ une base de $S_1$ et $(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5)$ une base de $S_2$. On considère la multiplication $\mu : S_1 \otimes S_1 \to S_2$. Au dessus de $\mathbb{P}S_1^\vee$ la matrice associée à $\mu$ est*

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_0 & 0 & X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X_0 & 0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix}.$$

*Et la matrice associée à l'application $\mu$ au dessus de $\mathbb{P}S_2$ est*

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_3 & Z_4 \\ Z_2 & Z_4 & Z_5 \end{pmatrix}.$$

*Dans $\mathbb{P}S_2$ le lieu défini par l'annulation du déterminant de cette matrice est le lieu des coniques singulières.*

De la même façon on pourra vérifier que le lieu d'annulation du déterminant de l'application

$$S_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}S_4} \to S_2^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}S_4}(1)$$

induite par la multiplication est l'hypersurface des **quartiques de Clebsch**, c'est à dire les quartiques s'écrivant comme somme de 5 puissances quatrièmes.

## Variétés d'Alexander-Hirschowitz

On note $\mathrm{Sec}^k v_d(\mathbb{P}^n)$ l'ensemble des $\mathbb{P}^{k-1}$ qui sont $k$-sécants à $v_d(\mathbb{P}^n)$. Les variétés d'Alexander-Hirshowitz sont les variétés de sécantes des variétés de Veronese qui sont défectueuses (i.e qui n'ont pas la dimension attendue). La dimension attendue de $\mathrm{Sec}^k v_d(\mathbb{P}^n)$ est $\min(k(n+1)-1, \binom{d+n}{n}-1)$. Toutes étaient connues par les anciens mais Alexander et Hirshowitz ont montré qu'elles étaient les seules défectueuses parmi les variétés de sécantes aux variétés de Veronese ([2]). Il s'agit des variétés suivantes (pour plus de détails, notamment historiques, voir [9]) :

- Toutes les variétés de sécantes des quadriques de $\mathbb{P}^n$, correspondant aux rangs des matrices symétriques, soit $\mathrm{Sec}^k(v_2(\mathbb{P}^n))$ pour $2 \leq k \leq n$.
- Les trois hypersurfaces correspondant à l'invariant "catalecticant" de Clebsch, c'est-à-dire $\mathrm{Sec}^5(v_4(\mathbb{P}^2))$, $\mathrm{Sec}^9(v_4(\mathbb{P}^3))$ et $\mathrm{Sec}^{14}(v_4(\mathbb{P}^4))$. Leurs degrés sont respectivement 6, 10 et 15.
- Enfin, $\mathrm{Sec}^7(v_3(\mathbb{P}^4))$ dont le degré égal à 15 n'était pas connu avant le travail d'Ottaviani ([48]).

Une remarque relativement simple (prop. 3.4.6) concernant la multiplication des formes $S_m \otimes S_n \to S_{n+m}$ permet de retrouver ces variétés à l'exception de la dernière.

Considérons l'homomorphisme $S_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}S_{n+m}}(-1) \xrightarrow{\mu} S_m \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}S_{n+m}}$ provenant de la multiplication. Les $s_m$ équations

$$[\sum_{(n_i)|\sum n_i = n} x_{(n_0,\cdots,n_r)} Z_{(n_0+m_0,\cdots,n_r+m_r)}]_{(m_j)|\sum m_j = m} = 0$$

proviennent aussi du produit de matrices

$$\mu.{}^t(x_{(n_0,\cdots,n_r)})_{(n_i)}.$$

On en déduit que le fibré projectif $\mathbb{P}E_{n,n+m}$ est birationnel à la sous-variété $F^0(\mu)$ de $\mathbb{P}S_{n+m}$ definie par les mineurs maximaux de $\mu$. C'est clairement un isomorphisme sur l'ouvert $F^0(\mu)\backslash F^1(\mu)$ où $F^1(\mu)$ est défini par les mineurs sous-maximaux. Lorsque $\dim S_k = k+1$ l'image inverse de $F^1(\mu)$ est un diviseur de $\mathbb{P}E_{n,n+m}$, ce qui prouve que le fibré projectif est l'éclaté de $F^0(\mu)$ le long de $F^1(\mu)$.

**Proposition 3.4.6.** *Supposons que $n \leq m$. Lorsque $\dim(\mathbb{P}S_{n+m}) < \dim(\mathbb{P}S_m) + \dim(\mathbb{P}S_1)\dim(\mathbb{P}S_n)$ la variété $\mathrm{Sec}^{s_n-1}v_{n+m}$ est défectueuse.*

*Démonstration.* L'application $S_n \otimes S_m \to S_{n+m}$ induit un plongement

$$\mathbb{P}S_{n+m} \hookrightarrow \mathbb{P}(S_n \otimes S_m).$$

On considère ce dernier espace comme l'espace projectif des matrices de dimension $s_n \times s_m$. Notons $\mathbf{M}$ la matrice générique $s_n \times s_m$. On a $F^0(\mu) = F^0(\mathbf{M}) \cap \mathbb{P}S_{n+m}$. Par ailleurs il est bien connu (conférer par exemple [29], pages 99-113) que $F^0(\mathbf{M}) = \mathrm{Sec}^{s_n-1}(\mathrm{Seg}(s_n, s_m))$ où la variété de Segre $\mathrm{Seg}(s_n, s_m)$ est identifiée à l'ensemble des matrices $s_n \times s_m$ de rang égal à 1. Comme $\mathbb{P}S_{n+m} \cap \mathrm{Seg}(s_n, s_m) = v_{n+m}$, on a une inclusion $\mathrm{Sec}^{s_n-1}v_{n+m} \subset F^0(\mu)$. La dimension de la variété de sécantes est donc inférieure à celle de la variété définie par les mineurs maximaux et lorsque ces deux variétés ont même dimension elles coïncident puisqu'elles sont irréductibles ($F^0(\mu)$ est birationnelle à un fibré projectif). Calculons les dimensions. Nous avons tout d'abord $\dim F^0(\mu) = s_{n+m} - s_m + s_n - 2$, et la dimension attendue pour $\mathrm{Sec}^{s_n-1}v_{n+m}$ est

$$\dim_{\mathrm{att}}(\mathrm{Sec}^{s_n-1}v_{n+m}) = (s_n - 1)(s_1 - 1) + s_n - 2 = s_n s_1 - s_1 - 1.$$

Les deux dimensions sont les mêmes lorsque $s_t = t+1$ (i.e $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$). La dimension réelle étant inférieure ou égale à la dimension attendue on en déduit que la condition

$$\dim F^0(\mu) < \dim_{\text{att}}(\text{Sec}^{s_n-1} v_{n+m})$$

implique que la variété $\text{Sec}^{s_n-1} v_{n+m}$ est défectueuse. Cette condition équivaut à

$$\dim(\mathbb{P}S_{n+m}) < \dim(\mathbb{P}S_m) + \dim(\mathbb{P}S_1)\dim(\mathbb{P}S_n).$$

$\square$

**Lemme 3.4.7.** *Soient $n \leq m$ et $r$ trois entiers strictement positifs. Alors, $\binom{n+m+r}{r} < \binom{m+r}{r} + r(\binom{n+r}{r} - 1)$ si et seulement si $n = m = 1$ et $r \geq 1$ quelconque, ou bien $n = m = 2$ et $r = 1, 2, 3$.*

*Démonstration.* La preuve est uniquement calculatoire. $\square$

On retrouve ainsi les premières variétés d'Alexander et Hirshowitz mais pas la dernière.

## 3.5 Fibrés de Schwarzenberger

En vertu de la proposition 3.2.3 la variété duale $(\text{Seg}(s_m, s_n, s_{n+m}))^\vee$ correspondant à $E_{n,n+m}$ est une hypersurface ($\text{SL}(V)$-invariante) si et seulement si $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2$. Quand $\dim_{\mathbb{C}}(V) > 2$ la codimension est strictement plus grande que 1. C'est pourquoi, parmi les fibrés de Steiner $\text{SL}(V)$ invariants provenant de la multiplication $S^m V \otimes S^n V \xrightarrow{\mu} S^{n+m} V$, nous accordons un développement supplémentaire à ceux que l'on obtient lorsque $\dim V = 2$.

On suppose donc dans toute cette partie que $V$ est un espace vectoriel de dimension 2 au dessus de $\mathbb{C}$. Conformément à la proposition 3.4.1, la multiplication

$$S_m \otimes S_n \xrightarrow{\mu} S_{n+m}$$

induit un fibré vectoriel $E_{n,n+m}$ sur $\mathbb{P}(S_n)$. Ces fibrés, introduits par Schwarzenberger dans [58], sont appelés **Fibrés de Schwarzenberger**. Par construction ces fibrés sont invariants sous l'action de SL(2) ([2]).

[2] Avec un argument reposant sur la décomposition de Clebsch-Gordan j'ai redonné une démonstration très courte de l'énoncé suivant qui implique qu'un fibré de Steiner $\text{St}(m, n, n)$ invariant sous l'action de SL(2) est un fibré de Schwarzenberger.

**Théorème 3.5.1** ([V4], thm. 3.1)**.** *Soient $A_1, \cdots, A_s$ des SL(2)-modules, non triviaux, de dimensions respectives $n_1 + 1 \geq \cdots \geq n_s + 1$ avec $n_1 = n_2 + \cdots + n_s$, $S_i$ le SL(2)-module irréductible de degré $i+1$ et $\phi \in \underline{\text{Hom}}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1^\vee)$ un SL(2)-homomorphisme. Alors,*

$$Det(\phi) \neq 0 \Leftrightarrow A_i \simeq S_{n_i} \text{ et } \phi \text{ est la multiplication } S_{n_2} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \to S_{n_1}.$$

Ce résultat était déjà prouvé par Ancona et Ottaviani pour $s = 3$ ([3], thm 2.6) et par C. Dionisi pour $s \geq 3$ ([18], thm 1.3.13). Leurs preuves résultaient d'une étude fine de l'action du groupe produit $\text{SL}(V_1) \times \text{SL}(V_2) \times \cdots \text{SL}(V_n)$ sur l'espace des hypermatrices $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ où les $V_i$ sont des espaces vectoriels complexes.

Nous notons $(t_0, t_1)$ une base de $S_1$, $(x_i = t_0^i t_1^{n-i})$, $(y_j = t_0^j t_1^{m-j})$,et $(z_l = t_0^l t_1^{n+m-l})$ les bases respectives de $S_n, S_m$ et $S_{n+m}$. Alors $\mu(x_i \otimes y_j) = z_{i+j}$. L'ordre naturel sur les vecteurs de la base fournit une représentation matricielle en termes de matrices de Hankel et de Toeplitz. En effet, l'application de multiplication s'écrit alors

$$S_m \longrightarrow S_n^\vee \otimes S_{n+m}$$

$$y_j \mapsto \sum_{i=0}^{i=n} x_i^\vee \otimes z_{i+j}$$

où $(x_i^\vee)$ est la base duale de $S_n^\vee$. Il en résulte, étant donnés les choix de coordonnées ci-dessous

$$\mathbb{P}(S_{n+m}^\vee) = \mathbb{P}(\mathbb{C}[Z_0, ..., Z_{n+m}]) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(\mathbb{C}[X_0, ..., X_n])$$

que la matrice représentative de l'homomorphisme composé

$$S_m \longrightarrow S_n^\vee \otimes S_{n+m} \longrightarrow S^{n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^n)}(1)$$

$$y_j \mapsto \sum_{i=0}^{i=n} x_i^\vee \otimes z_{i+j} \mapsto \sum_{i=0}^{i=n} z_{i+j} X_i$$

est la matrice de Toeplitz $(m+1) \times (n+m+1)$ suivante

$$M_m = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_n & & & & \\ & X_0 & X_1 & \cdots & X_n & & & \\ & & X_0 & X_1 & \cdots & X_n & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & & X_0 & X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix}.$$

De même, la matrice représentative de l'homomorphisme composé

$$S_m \longrightarrow S_n^\vee \otimes S_{n+m} \longrightarrow S_n^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_{n+m}^\vee)}(1)$$

$$y_j \mapsto \sum_{i=0}^{i=n} x_i^\vee \otimes z_{i+j} \mapsto \sum_{i=0}^{i=n} x_i^\vee Z_{i+j}$$

est la matrice persymétrique (ou de Hankel) $(m+1) \times (n+1)$ suivante

$$N_n = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_m \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & \cdots & Z_{m+1} \\ Z_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{n+m-1} \\ Z_n & \cdots & \cdots & Z_{n+m-1} & Z_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices proviennent de la même multimatrice (celle de la multiplication $\mu$) $M = (a_{i,j,k})$ où $a_{i,j,k} = 1$ quand $k = i + j$ et $i \in \{0, \cdots, n\}$, $j \in \{0, \cdots, m\}$ et $k \in \{0, \cdots, n+m\}$, $a_{i,j,k} = 0$ sinon. En introduisant les variables $\mathbb{P}(S_m) = \mathbb{P}(\mathbb{C}[Y_0, ..., Y_m])$, la multimatrice $M$ représente l'application trilinéaire

$$\sum_{i=0,\cdots,n} \sum_{j=0,\cdots,m} X_i Y_j Z_{i+j}.$$

La matrice $N_n$ est la tirée en arrière par le plongement naturel

$$\mu : \mathbb{P}(S_{n+m}) \hookrightarrow \mathbb{P}(S_m \otimes S_n)$$

de la $(m+1) \times (n+1)$ matrice générique. Ce plongement provient de la décomposition de Clebsch-Gordan de $S_m \otimes S_n$ en SL(2) modules irréductibles

$$S_m \otimes S_n = S_{n+m} \oplus \cdots \oplus S_{m-n}, \text{ avec } n \leq m.$$

Le lieu des zéros défini par les mineurs maximaux de $N_n$ est exactement le schéma des $(n-1)$-plans $n$-sécants (on suppose que $n \leq m$) à la courbe rationnelle normale $C_{n+m}$ définie par les deux mineurs (voir par exemple [29], prop. 9.7). Plus généralement le schéma $\mathcal{D}_{n-i,n+m}$ des zéros défini par le $i$-ème idéal de Fitting est identifié au schéma des $(n-i-1)$-plans $(n-i)$-sécants à la courbe rationnelle définie par les deux mineurs. Le théorème suivant est bien connu, peut-être sous d'autres formes (il est démontré par exemple dans [37]). Je donne ci-dessous une démonstration qui est celle que me proposa Christian Peskine il y a quelques années.

**Théorème 3.5.2.** *$\mathbb{P}(E_{n,n+m})$ est l'éclaté de $\mathcal{D}_{n,n+m}$ le long de $\mathcal{D}_{n-1,n+m}$.*

*Démonstration.* Conformément à la description matricielle ci-dessus, $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$ est plongé dans le produit $\mathbb{P}(S_n) \times \mathbb{P}(S_{n+m})$ et il y est défini par les équations $((\sum_{i=0}^{n} X_i Z_{i+j} = 0)_{j=0,\cdots,m})$. Notons respectivement par $p$ et $\pi$ les morphismes de projection sur $\mathbb{P}(S_{n+m})$ et $\mathbb{P}(S_n)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{n,n+m})}(a,b)$ le fibré en droites $p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_{n+m})}(a) \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n)}(b)$
L'image de $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$ par $p$ est tout simplement $\mathcal{D}_{n,n+m}$. La fibre au dessus d'un point général $(x_0, \cdots, x_n)$ est simplement le $\mathbb{P}^{n-1}$ defini par les $m+1$ équations linéaires $((\sum_{i=0}^{n} x_i Z_{i+j} = 0)_{j=0,\cdots,m})$ dans $\mathbb{P}(S_{n+m})$. Ces équations sont également obtenues par le produit $(x_0, \cdots, x_n)N_n$. Ceci veut dire que ce $\mathbb{P}^{n-1}$ appartient à $\mathcal{D}_{n,n+m}$. Le morphisme $p : \mathbb{P}(E_{n,n+m}) \to \mathcal{D}_{n,n+m}$ est donc birationnel et il est un isomorphisme hors de $\mathcal{D}_{n-1,n+m}$. Pour montrer que $\mathcal{D}_{n-1,n+m}$ est le centre de l'éclatement il faut établir que $p^{-1}(\mathcal{D}_{n-1,n+m})$ est un diviseur de $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$.

Plus généralement nous déterminons la classe de $p^{-1}(\mathcal{D}_{i,n+m})$ dans l'anneau de Chow $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{P}(E_{n,n+m}))$.

**Proposition 3.5.3.** *Pour tout $i < n$ il existe un homomorphisme injectif de fibrés vectoriels*

$$\mathcal{O}^{i+1}_{\mathbb{P}(E_{n,n+m})}(-1,0) \xrightarrow{\psi} (\pi^* E_{n,n+m-i})^\vee$$

*pour lequel $Z(\wedge^{i+1}\psi) = p^{-1}\mathcal{D}_{i,n+m}$ et $[p^{-1}\mathcal{D}_{i,n+m}] = c_{n-i}(coker\psi)$ dans $\mathbb{A}$.*

*Démonstration.* Pour tout $i < n$ nous avons les suites exactes suivantes sur $\mathbb{P}(S_n)$

$$0 \longrightarrow S_{m-i}(-1) \xrightarrow{M_{m-i}} S_{n+m-i} \xrightarrow{(Z_0,\cdots,Z_{n+m-i})} E_{n,n+m-i} \longrightarrow 0.$$

On dualise cette suite exacte et on la relève sur $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$

$$0 \longrightarrow (\pi^* E_{n,n+m-i})^\vee \longrightarrow S^\vee_{n+m-i} \xrightarrow{{}^tM_{m-i}} S^\vee_{m-i}(0,1) \longrightarrow 0.$$

Nous avons aussi pour tout $i < n$ une application sur $\mathbb{P}(S_{n+m})$

$$S_{n+m-i} \xrightarrow{\phi} S_i^\vee(1)$$

où $\mathcal{D}_{i,n+m} = Z(\wedge^{i+1}\phi) \subset \mathbb{P}(S_{n+m})$ et $\phi$ est donnée par la matrice suivante

$$N_i = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_{n+m-i} \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & \cdots & Z_{n+m-i+1} \\ Z_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{n+m-1} \\ Z_i & \cdots & \cdots & Z_{n+m-1} & Z_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Comme auparavant nous dualisons cette application et nous la relevons sur $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$

$$S_i(-1,0) \xrightarrow{N_i} S^\vee_{n+m-i}.$$

Comme pour tout $i < n$ le produit ${}^tM_{m-i}N_i$ est nul sur $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$, l'homomorphisme composé

$$S_i(-1,0) \xrightarrow{N_i} S^\vee_{n+m-i} \xrightarrow{{}^tM_{m-i}} S^\vee_{m-i}(0,1)$$

est nul. Il y a donc une application non nulle

$$S_i(-1,0) \xrightarrow{\psi} (\pi^* E_{n,n+m-i})^\vee.$$

Par le lemme du serpent les conoyaux de $\psi$ et $N_i$ sont les mêmes sur $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$. On en déduit que $Z(\wedge^{i+1}\psi) = Z(\wedge^{i+1}N_i)$ et ce dernier est l'image inverse $p^{-1}\mathcal{D}_{i,n+m}$. Enfin nous vérifions sans difficulté que $\dim p^{-1}(\mathcal{D}_{i,n+m}) = n+i-1$. La codimension est celle attendue et nous pouvons alors appliquer la formule de Thom-Porteous pour conclure. □

*Fin de la preuve du théorème 3.5.2 :* Il s'ensuit que $p^{-1}\mathcal{D}_{n-1,n+m}$ est un diviseur de $\mathbb{P}(E_{n,n+m})$ defini par le déterminant de

$$S_{n-1}(-1,0) \xrightarrow{\psi} (\pi^* E_{n,m-1})^\vee.$$

Un simple calcul de classes de Chern montre que $p^{-1}\mathcal{D}_{n-1,n+m}$ est défini par une section non nulle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{n,n+m})}(n, n-m-2)$ i.e. par une section de $(S^n E_{n,n+m})(n-m-2)$. □

**Remarque 3.5.4** ([V2], prop. 1.2). *Sur $\mathbb{P}^2$, l'existence d'une section non nulle de $S^2(E_{2,n+2})(-n)$ caractérise les fibrés de Schwarzenberger parmi les fibrés stables de rang deux.*

Un fibré vectoriel $E$ de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ vérifie $h^0(S^2(E(-c_1))) = 0$ si et seulement s'il est stable et $h^0(S^2(E(1-c_1)) = 1$ si et seulement s'il est Schwarzenberger. Cette section globale non nulle équivaut à la donnée d'un homomorphisme symétrique $E(-1) \to E$ dont le déterminant est la conique associée aux Schwarzenberger. Plus généralement une section non nulle de $H^0(S^2(E(n-c_1)))$ induit un revêtement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de la courbe de degré $2n$ donnée par le déterminant de l'homomorphsime symétrique $E(-n) \to E$. Nous en reparlons ci-dessous lorsque $n = 2$.

Une autre construction élémentaire conduit à des fibrés de Steiner, dont les mineurs $2 \times 2$ d'une des matrices associées s'annulent le long d'une courbe, généralisant ainsi les fibrés de Schwarzenberger. En effet considérons $X \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ une courbe intègre non dégénérée de degré $n + r$. Appelons $\overline{q}$ le morphisme de projection de $q^{-1}(X)$ sur $X$ (restriction du morphisme $q : \mathbb{F} \to \mathbb{P}^{n\vee}$) et $\overline{p}$ celui de $q^{-1}(X)$ sur $\mathbb{P}^n$ (restriction du morphisme $p : \mathbb{F} \to \mathbb{P}^n$). Le morphisme $\overline{p}$ est un revêtement de degré $(n + r)$ de $\mathbb{P}^n$.

**Proposition 3.5.5.** *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de rang 1 sur la courbe $X$ tel que $h^1(\mathcal{L}(-1)) = 0$. Alors $E(X, \mathcal{L}) := \overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L}$ est un faisceau de Steiner de rang égal au degré de $X$.*

**Remarque 3.5.6.** *Lorsque $h^0(\mathcal{L} \otimes O_{x^\vee})$ est constant ces faisceaux sont des fibrés de Steiner. Ceci impose que le faisceau $\mathcal{L}$ soit inversible mais la courbe peut-être singulière. Ces fibrés généralisent les fibrés de Schwarzenberger qui proviennent des images directes des faisceaux inversibles sur les courbes rationnelles normales. Arrondo propose une autre généralisation des fibrés de Schwarzenberger ([4], déf. page 6) qui, aux détails près, recouvre celle-ci.*

*Démonstration.* La dimension relative étant nulle on a $R^1\overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L} = 0$. Par conséquent, $\overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L}$ est un faisceau de Steiner sur $\mathbb{P}^n$ avec présentation :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}(-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \otimes O_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

Son rang est égal à $h^0(\mathcal{L}) - h^0(\mathcal{L}(-1)) = \deg(X) = n + r$. $\square$

La variété associée sur laquelle le faisceau est singulier est définie par l'homomorphisme

$$H^0(\mathcal{L}(-1)) \otimes O_{\mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}))}(-1) \xrightarrow{M} H^0(O_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes O_{\mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}))}.$$

Si $(e_1, \cdots, e_d)$ est une base de $H^0(\mathcal{L}(-1))$ et $(x_0, \cdots, x_n)$ une base de $\mathbb{P}^n$ on en déduit que $M = (e_i \otimes x_j)$. Le long de la courbe la matrice est de rang 1 car les $x_j$ sont des diviseurs de degré $n = \deg(X)$.

Seuls les cas d'intersection avec $\mathrm{Seg}(n, m)$ ont été étudiés ([3], [22], [V3]). Pour les intersections avec $\mathrm{Sec}^i(\mathrm{Seg}((n, m))$ il s'agit d'un travail en cours (avec Faenzi et Polizzi).

## 3.6 Fibrés associés à une quartique

Dans l'article fondateur de Schwarzenberger [58] l'auteur introduit deux familles de fibrés vectoriels : les fibrés de Schwarzenberger qui sont les images des faisceaux inversibles sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ par la projection $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to S^2\mathbb{P}^1$ et ceux provenant, via la projection depuis un point d'une surface cubique lisse de $\mathbb{P}^3$, d'un faisceau inversible de cette surface.

Pour la première famille son article est très complet et contient déjà bon nombre de résultats qui réapparaitront plus tard. Pour ce qui concerne la seconde famille Schwarzenberger donne les classes de Chern des fibrés images en fonction de la classe du faisceau inversible dans le groupe de Picard de la surface cubique marquée ([58], thm. 6). Il prouve que les droites de saut des fibrés images, lorsque la première classe de Chern est impaire, doivent être tangentes à la quartique de ramification ([58], prop. 10) et c'est à peu près tout.

Poursuivant son travail je prouve que les droites de saut des fibrés impairs sont des bitangentes à la quartique (donc ensemblistement au plus 28) et ceci quelle que soit la valeur de la seconde classe de Chern ([V9], thm. 3.2). L'idée est d'étudier ce revêtement double comme projection d'une sous-variété de la variété d'incidence point-droites de $\mathbb{P}^2$. Pour cela je reviens sur l'involution de Geiser définie par l'éclatement de 7 points en position générale par le système linéaire des cubiques. On note $Z$ ce groupe de points et $J_Z$ son faisceau d'idéaux. On pose $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V$ et $W = H^0(J_Z(3))$. L'éclaté $X = \mathbb{P}J_Z$ est défini dans $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ par deux équations $\sum X_i\Delta_i = 0$ et $\sum C_i\Delta_i = 0$. La première des deux fournit un isomorphisme $W \simeq Hom(V, \mathbb{C})$. On peut alors considérer que $\mathbb{P}J_Z$ est une hypersurface de bidegrée $(2,1)$ de la variété d'incidence point-droite de $\mathbb{P}V$ où les droites de $\mathbb{P}V$ sont les cubiques passant par les sept points de base.

On note $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$ la variété d'incidence "points-droites" de $\mathbb{P}^2$, $p$ et $q$ les projections, $\overline{p}$ et $\overline{q}$ leurs restrictions à la sous-variété $\mathbb{P}J_Z$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^{2\vee} = \mathbb{P}W & \xleftarrow{\overline{q}} & \mathbb{P}J_Z \subset \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{2\vee} = \mathbb{P}W \\ & & \overline{p}\big\downarrow p & & \\ & & \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V & & \end{array}$$

On pose $E_n := \overline{q}_*\overline{p}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$. Ces images directes sont de rang deux car elles proviennent de fibrés inversibles sur la surface $\mathbb{P}J_Z$ qui est un revêtement double du plan. On montre que ces fibrés sont stables et que leurs droites de saut, pour $n > 3$ impair, sont supportées par toutes les 28 bitangentes ; on donne leur ordre de saut ([V9], thm. 4.4) selon qu'elles sont une des 7 de départ ou une des 21 restantes.

**Question 2.** *Deux questions au moins me semblent intéressantes :*

1. *Montrer que le schéma des droites de saut de $E_3$ est exactement supporté par les 7 droites ayant servi à la construction.*
2. *Classifier les fibrés vectoriels pour lesquels il existe une section non nulle de $S^2E(2-c_1(E))$. Ceci consiste, je pense, à s'affranchir de la donnée des*

*7 droites de départ. Il existe par exemple, comme cela apparaît dans un travail en cours (avec Daniele Faenzi et Francesco Polizzi) sur les revêtements triples du plan, un fibré de Steiner*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^4(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^6 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

*possèdant six droites bisauteuses tangentes à une conique (mais pas 7 ce qui en ferait un fibré de Schwarzenberger, si la septième est tangente à la conique, un fibré logarithmique sinon) tel que* $h^0(S^2E(-2)) = 1$.

# Chapitre 4

# Géométrie classique et Fibrés vectoriels

À un système linéaire de formes binaires on associe une variété de Poncelet. On relie alors les syzygies du système linéaire et les singularités de la variéte de Poncelet associée (partie 4.1). On donne ensuite les droites de saut des fibrés logarithmiques plans, les droites de saut de fibrés impairs provenant d'un revêtement double ramifié le long d'une quartique lisse ainsi que le schéma des droites des saut des fibrés de Schwarzenberger. On vérifie que le morphisme de Barth restreint aux fibrés de Schwarzenberger est injectif (ensemblistement) (partie 4.2). Dans la dernière partie on montre que les coniques de saut des fibrés de Schwarzenberger sont les coniques du grand théorème de Poncelet. Ce qui permet de donner une nouvelle preuve de ce théorème (partie 4.3).

## 4.1 Syzygies et surfaces de Poncelet

Dans [V8] nous étudions les stratifications de systèmes linéaires de formes binaires en fonction de leurs syzygies. Il s'agit d'étudier les noyaux $\mathcal{N}$ d'applications $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$. Comme $\mathcal{N} = \sum_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)$ avec $m = \sum_i a_i$, il s'agit en particulier d'étudier la suite d'entiers $(a_1, \cdots, a_{n-1})$. Si l'on considère le morphisme $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{n-1}$ dont l'image $C$ est une courbe rationnelle de degré $m$, ce noyau est le dual du fibré tangent de $\mathbb{P}^{n-1}$ restreint à la courbe image, en effet on a

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^{n-1}}(1) \otimes \mathcal{O}_C \simeq \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}^n \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1) \otimes \mathcal{O}_C \to 0.$$

Nous retrouvons ainsi le problème classique de la décomposition du fibré tangent d'une courbe rationnelle de $\mathbb{P}^n$ et en particulier le travail de Ramella ([55]) sur $\mathbb{P}^3$. Au lieu de suivre ce chemin très emprunté nous considérons les variétés de Poncelet obtenues à partir de systèmes linéaires de formes binaires (pinceau pour une courbe, réseau pour une surface). Pour être plus précis les $n$ sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ (soit, pour chacune, $m$ points sur la courbe rationnelle normale $C_{n-1}$)

correspondent à $n$ sections du fibré de Schwarzenberger $E_{n-1,m}(C_{n-1})$. Ces $n$ sections s'annulent sur l'hypersurface déterminant. Lorsqu'une syzygie de degré 1 existe nous montrons que ces variétés sont singulières et nous décrivons les singularités lorsque le réseau associé possède des syzygies en degré 1. Pour être plus précis, on montre

**Théorème 4.1.1** ([V8], thm. 3.8)**.** *La variété de Poncelet associée à un élément $\Lambda \in G(k,n)$ possèdant au moins 1 syzygie de degré 1 est singulière. De plus la variété de Poncelet associée à un tel élément lorsqu'il est général contient $\binom{n-1}{k}$ droites et elle est singulière aux $\binom{n-1}{k+1}$ sommets de cette configuration.*

Résultat modeste mais cette réalisation géométrique des systèmes linéaires de formes binaires par le biais des variétés de Poncelet (brièvement introduites à la fin de l'article de Trautmann [61]) me semble digne d'intérêt. En effet, même pour les surfaces cubiques (associées à des réseaux de quintiques binaires) des questions restent ouvertes, par exemple :

**Question 3.** *Les syzygies de degré 1 correspondent à des cubiques singulières spéciales. Existe-t'il une relation entre syzygies de degré deux et cubiques singulières ? Est-ce que toute surface cubique est de Poncelet ? Pour les cubiques lisses qui le seraient (si elles ne le sont pas toutes) comment caractériser dans le réseau de formes binaires les 27 droites de la surface ? Un calcul simple de dimension permet de vérifier que la quartique générale n'est pas de Poncelet. On voudrait alors caractériser (dimension, degré, etc) le lieu des quartiques de Poncelet.*

Seules les courbes de Poncelet ont-été sérieusement étudiées. À ma connaissance il n'y a, hormis ce premier petit pas, aucun résultat sur ces surfaces.

## 4.2 Sous-variétés sauteuses

La principale méthode que j'utilise pour classifier les fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^n$ est d'étudier, pour un fibré $E$ donné, les sous-variétés $w_k(E)$ des $k$-plans de $\mathbb{P}^n$ (pour $k = 1, \cdots, n-1$) sur lesquels la restriction de $E$ n'est pas générique. Cette méthode est initiée entre autres auteurs par Barth ([5]), Gruson, Peskine ([26]), sans oublier Hartshorne ([31])). Par exemple ce peut être la perte de la stabilité, ou encore l'apparition d'une section exceptionnelle. D'autres restrictions sont intéressantes, comme celles sur les courbes rationnelles, mais excepté pour le cas des coniques, l'espace des courbes rationnelles est bien plus délicat à utiliser que les grassmaniennes. Malgré quelques tentatives de formulation d'un grand théorème de Poncelet pour les cubiques gauches, je n'ai jamais sérieusement étudié les restrictions sur d'autres courbes que des coniques et des droites. Toutes ces sous-variétés sont dites **de saut** et leurs droites, plans, coniques ou autres sont appelées **de saut** et aussi **sauteuses**. Pour en revenir aux grassmaniennes, les deux cas les plus faciles à manipuler sont celui des droites (via les théorèmes de Grothendieck qui permet de décomposer le fibré restreint en somme directe de faisceaux en droites, et de Grauert et Mülich qui affirme que sous une condition

de stabilité, que je détaillerai plus loin, la décomposition $\sum_i \mathcal{O}_l(a_i)$ sur la droite générique vérifie $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$) et celui des hyperplans (grâce à la dualité projective). L'idéal (de facilité) est obtenu sur le plan projectif quand droites et hyperplans coïncident. Aussi la plupart de mes travaux concernent l'étude des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^2$ ([1]).
Le lien géométrie-fibrés s'incarne donc dans les variétés de saut, ou sauteuses. Ces dernières concentrent l'information géométrique même s'il est souvent difficile de la faire apparaître. Retrouver la géométrie cachée est l'objet de ce paragraphe. On sait qu'il existe un schéma de saut associé à un fibré donné (voir annexe II) ; il s'agit, en l'étudiant, de retrouver les propriétés géométriques qui ont fait de ce schéma particulier celui qui est associé à ce fibré précis.

Pour des petites valeurs des classes de Chern, les droites de saut correspondent en général aux sécantes des lieux des zéros des sections globales. Par exemple, considérons le fibré $E \in M_{\mathbb{P}^2}(-1,3)$. Il possède trois droites de saut. On peut montrer que $h^0(E(1)) = 1$. Considérons alors l'unique section non-nulle (modulo constante) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow E(1) \longrightarrow J_{Z(s)}(1) \longrightarrow 0.$$

La décomposition sur une droite $l \in S(E)$ du fibré $E$ est $E_l = \mathcal{O}_l(1) \oplus \mathcal{O}_l(-2)$. La surjection

$$E_l(1) \longrightarrow \mathcal{O}_l(-|l \cap Z(s)|) \oplus \mathfrak{F},$$

où $\mathfrak{F}$ est un faisceau gratte-ciel supporté par le schéma $l \cap Z(s)$ et $|l \cap Z(s)|$ est le "nombre" de points de l'intersection, prouve que ce "nombre" est égal à deux. Le schéma $Z(s)$ étant constitué de trois points, les droites de saut sont les trois côtés du triangle.

Un autre exemple est celui des fibrés de Schwarzenberger sur $\mathbb{P}^2$. Comme ils sont SL(2) invariants, leur courbe de saut ne peut être que la conique fixée par SL(2). Les logarithmiques sur $\mathbb{P}^2$ ont un lieu de saut qui dépend exclusivement de la donnée des droites de départ. Ainsi le fibré associé à 7 droites aura pour droites de saut les points de l'espace dual qui sont les points singuliers des cubiques singulières passant par les sept points. Les 7 droites induisent un revêtement double du plan (voir involution de Geiser) et la courbe de saut est la sextique de ramification (en haut). Plus généralement le fibré logarithmique $E(Z)$ associé à un groupe de points $Z \subset \mathbb{P}^2$ de longueur égale à $2n+1$ aura pour courbe de

[1] Le travail portant sur la surface de Togliatti s'interprète lui aussi en termes de restriction d'un fibré aux droites du plan ; en effet un énoncé équivalent au théorème de Togliatti est :

**Théorème 4.2.1.** *On considère les fibrés vectoriels définis par une suite exacte du type :*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^4 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) \longrightarrow 0$$

*(ces fibrés sont indexés par les $\mathbb{P}^3$ de formes cubiques). Il existe (modulo* PGL(3)*) un unique fibré $E$ vérifiant $h^0(E_l) \neq 0$ pour une droite générale $l \subset \mathbb{P}^2$. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, ce fibré est le noyau de l'homomorphisme représenté par la matrice $\phi = (X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_0X_1X_2)$.*

saut la courbe ([22], thm. 5.2)

$$S(E(Z)) = \overline{\{x \in \mathbb{P}^2, h^0(\mathcal{J}_Z \otimes \mathfrak{m}_x^{n-1}(n)) \neq 0\}}.$$

Mais la plupart du temps il n'y aucune méthode générale permettant de visualier, de donner un sens géométrique aux droites de saut. Au fond, une bonne partie de mon travail a été consacrée à ce point précis.

Je voudrais souligner ci-après trois cas pour lesquels la géométrie sous-jacente apparaît clairement en étudiant les droites de saut.

I. Les intersections avec les variétés discriminants.

Le fibré logarithmique associé à 8 droites $(l_1, \cdots, l_8)$ en position linéaire générale. Il admet la résolution ci-dessous :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^5(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^7 \longrightarrow E(3) \longrightarrow 0.$$

Son schéma des droites de saut est de longueur égale à 36. On montre que les droites $l_i$ sont sauteuses d'ordre deux et à ce titre doivent être comptées trois fois. Il reste donc un schéma de longeur 12. Les 8 points $(l_1^\vee, \cdots, l_8^\vee)$ de $\mathbb{P}^{2\vee}$ définissent un pinceau de cubiques. Ce pinceau contient 12 cubiques singulières, et il apparaît donc 12 points (les points doubles des cubiques) supplémentaires. On vérifie que ce sont bien les droites de saut de $E$. Plus généralement je montre que l'on obtient avec le même raisonnement le schéma des droites de saut des fibrés logarithmiques impairs.

**Théorème 4.2.2** ([V7], thm. 3.1). *Soit $Z$ un groupe de points de longueur $2n$ en position linéaire générale de $\mathbb{P}^2$ et $E(Z)$ le fibré logarithmique associé. Alors, $S(E(Z))$ est supporté par le lieu géométrique*

$$Z \cup \overline{\{x \in \mathbb{P}^2, h^0(\mathcal{J}_Z \otimes \mathfrak{m}_x^{n-2}(n-1)) \neq 0\}}.$$

*Si $Z$ est général parmi les groupes de points du plan de longueur $2n$ alors*

$$S(E(Z)) = Z^{n-1} \sqcup \{x \in \mathbb{P}^2, h^0(\mathcal{J}_Z \otimes \mathfrak{m}_x^{n-2}(n-1)) \neq 0\}$$

*où $Z^{n-1}$ désigne le $(n-2)$-ième voisinage infinitésimal de $Z$ et $\sqcup$ l'union disjointe.*

II. Les sauteuses supportées par les 28 bitangentes d'une quartique plane.

Comme nous l'avons rappelé dans la partie consacrée à l'involution de Geiser, les sept points $x_i$ que l'on éclate ont pour images les droites bitangentes $l_i$ tandis que chaque couple de points $(x_i, x_j)$ définit une unique droite $d_{i,j}$ dont l'image est aussi une droite, notée $l_{i,j}$ qui est une des 21 bitangentes restantes. Ces 28 droites apparaissent dans les schémas de droites de saut des fibrés $E_n$ (fibrés définis en fin de chapitre précédent dans la section 3.6) comme décrit dans le théorème ci-dessous.

**Théorème 4.2.3** ([V9], thm. 4.4). *Soit $n \geq 2$, les 28 bisécantes sautent de la manière suivante,*
*1) La droite $l_i$ "image" du point $x_i$ est une droite de saut d'ordre $\lceil \frac{3n-2}{2} \rceil$ pour le fibré $E_n$.*
*2) La droite $l_{i,j}$ "image" de la droite joignant $x_i$ et $x_j$ est une droite de saut d'ordre $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ pour le fibré $E_n$.*

**Remarque 4.2.4.** *Lorsque $n \geq 4$, les 28 bisécantes sont des droites sauteuses des fibrés $E_n$, et elles sont les seules lorsque $n$ est impair.*

III. Les tangentes à la conique pour les Schwarzenberger.

Dans le cas pair (comme je le rappelle dans l'annexe II) une courbe du plan dual, dite **courbe de saut** est associée au fibré stable de rang deux $E$ et est notée $S(E)$. Cette association définit un morphisme (que Joseph Le Potier appela "morphisme de Barth") :

$$M_{\mathbb{P}^2}(0,n) \ni E \mapsto S(E) \in \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(n)).$$

Le Potier et Tikhomirov ont montré que ce morphisme est génériquement injectif. Mais il n'est pas évident, pour une courbe donnée de montrer que l'ensemble des fibrés dont elle est la courbe de saut se réduit à un seul fibré vectoriel. Pour les fibrés de Schwarzenberger, nous y arrivons. Plus précisément, on montre que le morphisme de Barth restreint aux fibrés de Schwarzenberger (isomorphe à $\mathbb{P}^5$) est injectif, cela revient à montrer qu'un fibré pair dont la courbe de saut est supportée par une conique lisse est un fibré de Schwarzenberger. Tout d'abord il faut identifier son image.

Soit $C$ une conique lisse d'équation $\{f = 0\}$ sur $\mathbb{P}^{2\vee}$ et $E_{2,2n+1}$ le fibré de Schwarzenberger associé à $C$ dont les classes de Chern sont $c_1(E_{2,2n+1}) = 2n$ et $c_2(E_{2,2n+1}) = \binom{2n+1}{2}$. La seconde classe de Chern du fibré normalisé $E_{2,2n+1}(-n)$ est $n(n+1)$. On note $mC$ le diviseur défini par l'équation $\{f^m = 0\}$.

**Proposition 4.2.5.** $S(E_{2,2n+1}) = \frac{n(n+1)}{2}C$.

*Démonstration.* Comme $E_{2,2n+1}$ est invariant sous l'action de SL(2) (où SL(2) = Aut($C$)), son diviseur de droites sauteuses est supporté par $C$. Son degré égale $n(n+1)$, ce qui prouve la proposition. □

Montrons maintenant que les fibrés de Schwarzenberger de déterminant pair sont déterminés par leur diviseur de droites de saut.

**Théorème 4.2.6.** *Soit $\mathcal{E}$ un fibré de déterminant pair stable de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ tel que $S(\mathcal{E}) = nC$ ($n \geq 1$). Alors $\mathcal{E}$ est un fibré de Schwarzenberger de la conique $C$.*

*Démonstration.* On peut supposer que $c_1(\mathcal{E}) = 0$, dans ce cas on montre qu'il existe un entier $m$ tel que $n = m(m-1)/2$ et $\mathcal{E}(m-1) = E_{2,2m-1}(C)$.

On considère le morphisme de Barth qui a un faisceau sans torsion associe sa courbe de droites de saut

$$\gamma : M(0,2n) \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(2n))).$$

Le Potier a montré que ce morphisme est quasi-fini sur l'ouvert des fibrés vectoriels ([40], thm 6.11). On sait par ailleurs que la courbe de droites de saut d'un faisceau sans torsion qui n'est pas localement libre contient une composante linéaire ([44], prop.1.8). La fibre $\gamma^{-1}(nC)$, constituée de fibrés vectoriels, est donc finie.

Soit $\sigma \in \mathrm{SL}(2) \simeq \mathrm{Aut}(C)$ ; comme $S(\sigma^*\mathcal{E}) = \sigma S(\mathcal{E}) = nC$ on en déduit que $\mathrm{SL}(2)$ agit sur la fibre $\gamma^{-1}(nC)$. Comme $\mathrm{SL}(2)$ est connexe cette action est triviale, i.e tous les fibrés de $\gamma^{-1}(nC)$ sont invariants sous l'action de $\mathrm{SL}(2)$. Le lemme suivant permet de conclure.

**Lemme 4.2.7** ([V2], prop. 2.3)**.** *Les seuls fibrés stables de rang 2 invariants sous l'action de* $\mathrm{SL}(2)$ *sur* $\mathbb{P}^2$ *sont les fibrés de Schwarzenberger.*

L'idée est de considérer l'action diagonale de $\mathrm{SL}(2)$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. □

On en déduit directement que les coniques multiples avec multiplicité ne sont pas toutes des diviseurs de saut.

**Corollaire 4.2.8.** *S'il n'existe pas de nombre entier* $m$ *tel que* $n = \binom{m}{2}$*, la courbe* $nC$ *n'est pas le diviseur de saut d'un fibré vectoriel pair.*

Soit $\gamma : M(0, n(n+1)) \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2\vee}, O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(n(n+1))))$. Il résulte du théorème ci-dessus que la fibre au-dessus d'une conique multiple de l'image est réduite ensemblistement à un point.

**Corollaire 4.2.9.** $\gamma^{-1}(\frac{n(n+1)}{2}C) = \{E_{2,2n+1}\}$ *(ensemblistement).*

Malheureusement ce résultat ne prouve pas que le morphisme de Barth soit génériquement injectif. En effet, on montre que les fibrés de Schwarzenberger sont dans le lieu de ramification du morphisme ([51]). Autrement dit l'application différentielle

$$d\gamma_{[E_{2,2n+1}]} : T_{[E_{2,2n+1}]}M(0, n(n+1)) \longrightarrow T_{\frac{n(n+1)}{2}C}\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2\vee}, O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(n(n+1))))$$

n'est pas injective. Compte tenu de l'équivariance de cette application sous l'action de $\mathrm{SL}(2)$, on a :

$$T_{[E_{2,2n+1}]}M(0, n(n+1)) = H^1(\mathrm{End}E_{2,2n+1}) = \sum_{i=2}^{n+1} S_{2i},$$

$$T_{\frac{n(n+1)}{2}C}\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2\vee}, O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(n(n+1)))) = H^0(O_{\frac{n(n+1)}{2}C}(n(n+1))$$

et

$$H^0(O_{\frac{n(n+1)}{2}C}(n(n+1)) = \sum_{i=0}^{[\frac{n(n+1)}{4}]-1} S_{n(n+1)-4i}.$$

Soit $n \geq 2$. Le module $S_6$ appartient au noyau de l'application quand $n(n+1) = 0 \pmod 4$ et $S_4$ appartient au noyau de cette application lorsque $n(n+1) = 2 (\bmod 4)$.

## 4.3 Schwarzenberger et Poncelet

Dans cette partie je propose une nouvelle démonstration du grand théorème de Poncelet à partir des coniques de saut des fibrés de Schwarzenberger.

**Théorème 4.3.1** ([V6], thm. 2.1)**.** *Soient $C \subset \mathbb{P}^2$ une conique lisse, $\mathfrak{C}_n(C) \subset \mathbb{P}^5$ l'hypersurface des coniques $n$-circonscrites à $C$ et $E_{2,n}(C)$ le fibré de Schwarzenberger sur $\mathbb{P}^2$ associé à un diviseur de degré $n$ sur $C$. Alors,*

$$J(E_{2,n}(C)) = \mathfrak{C}_n(C).$$

Ce résultat n'est guère surprenant mais il apporte un nouveau point de vue — celui des fibrés vectoriels — concernant le célèbre "grand théorème de Poncelet". Il repose sur le fait suivant : les sections du fibré $E_{2,n}(C)$ s'annulent sur les sommets de configurations de $n$-droites tangentes à la conique $C$.

Conformément au "principe de continuité" de Poncelet, son grand théorème concerne aussi les coniques singulières. Plus précisément $\dim(\mathfrak{C}_n(C) \cap \mathcal{S}) \geq 3$ où $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}^5$ est le diviseur des coniques singulières. Les propositions 6.0.13, 6.0.14 et 6.0.15 montrent même que $\dim(\mathfrak{C}_n(C) \cap \mathcal{S}) = 3$. La correspondance avec les coniques de saut fournit des conditions de fermeture de nature cohomologique. À propos des coniques singulières $n$-circonscrites, on montre :
1. Dans le cas $n$ impair (le fibré $E_{2,n}$ est pair) les seules coniques singulières de l'intersection $\mathfrak{C}_n(C) \cap \mathcal{S}$ sont celles formées d'une droite tangente de $C$ (i.e sauteuse pour $E_{2,n}$) et une droite quelconque ([V6], thm. 2.2).
2. Dans le cas $n$ pair, par contre, il existe des coniques $n$-circonscrites de la forme $l_1 \cup l_2$ sans qu'aucune des deux droites ne soit sauteuse. Chaque droite contient alors $\frac{n}{2}$ sommets d'un polygone à $n$ côtés circonscrit à $C$. Pour cela il faut vérifier que le produit des involutions de Frégier de centres $l_1^\vee$ et $l_2^\vee$ est d'ordre $\frac{n}{2}$ (voir la partie 2.1 de ce texte sur les involutions de Frégier). On vérifie sur un invariant des quatre points $(l_1 \cup l_2) \cap C$ plus fin que le birapport quand ceci est réalisé ([V6], lem. 2.3 ).

La conique $C$ n'est pas une conique de saut pour le fibré $E_{2,n}(C)$. Plus généralement la décomposition du fibré de Scwharzenberger $E_{n,n+m}(C_n)$ sur la courbe rationnelle normale sous-jacente $C_n$ est parfaitement équilibrée. En effet on vérifie :

**Proposition 4.3.2.** *$E_{n,n+m} \otimes \mathcal{O}_{C_n} = S_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{C_n}(\frac{m+1}{n}) = S_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m+1)$.*

**Remarque 4.3.3.** *En particulier on a $T_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes \mathcal{O}_{C_n} \simeq S_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1)$*

*Démonstration.* Le fibré $E_{n,n+m}$ au-dessus de $C_n$ peut s'interpréter comme le fibré des espaces tangents de $C_n$ à l'ordre $m+1$ (cf. la proposition 3.4.2). Plus précisément, au-dessus de $\mathbb{P}^1 \simeq C_n$, nous avons

$$0 \to S_k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \to S_{n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to E_{n,n+m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to 0.$$

La fibre de ce fibré au-dessus d'un point $x \in \mathbb{P}^1$ est

$$H^0(\mathfrak{m}_x^{m+1}(n+m)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-1)) = S_{n-1}$$

qui est indépendant de $x$. $\square$

La preuve du théorème précédent repose sur le fait qu'une courbe de degré $(n-1)$ passant par les $\binom{n}{2}$ sommets d'une configuration de $n$ droites tangentes à une conique fixée passe par les $\binom{n}{2}$ sommets d'une infinité de telles configurations de droites. Une telle courbe est appelée **courbe de Poncelet**. Il s'agit d'un résultat démontré par Darboux ([17], page 248) dans la magnifique partie de son livre de géométrie consacrée aux polygones de Poncelet. J'en ai donné, suivant l'exemple de Trautmann ([63], thm. 1.6), un énoncé "actualisé" :

**Théorème 4.3.4** ([V2], thm. 1.12). *Soit $S \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré $(n-1)$ et $C$ une conique de $\mathbb{P}^{2\vee}$. S'il existe un diviseur effectif $D_n$, de degré $n$, sur $C$ dont le schéma des bisécantes est contenu dans $S$, alors $S$ est une courbe de Poncelet associée à $C^\vee$.*

*Démonstration.* En utilisant les fibrés de Schwarzenberger la preuve devient toute simple. En effet la donnée du diviseur $D_n$ sur $C$ correspond à la donnée non seulement du fibré de Schwarzenberger $E_{2,n}(C)$ mais aussi d'une section globale $s \in H^0(E_{2,n}(C))$ de ce fibré s'annulant sur le schéma des bisécantes de $D_n$, en d'autres termes sur les sommets de la configuration de $n$ droites (duale de $D_n$) tangentes à $C^\vee$ lorsque $D_n$ est lisse.

$$0 \to O_{\mathbb{P}^2} \to E_{2,n}(C) \to \mathcal{I}_{Z(s)}(n-1) \to 0.$$

La courbe $S$ est une section du faisceau $\mathcal{I}_{Z(s)}(n-1)$. Il existe donc une section $t$ de $E_{2,n}(C)$ telle que $s \wedge t = 0$ soit l'équation de $S$. Ce qui prouve le théorème. $\square$

Revenons maintenant au cas non plus des courbes de Poncelet mais des coniques Poncelet-associées à une conique fixée $C$. La conique $C$ n'est jamais $n$-circonscrite à elle même quelque soit la valeur de $n$, puisque l'on a la décomposition suivante $E_{2,n}(C) \otimes O_C = \mathcal{O}_C(\frac{n-1}{2})^2$ d'après la proposition 4.3.2. Cette remarque permet de montrer très simplement qu'une conique osculatrice à $C$ ne lui est jamais $n$-circonscrite (quelque soit la valeur de $n \geq 3$).

**Proposition 4.3.5.** *Soit $D$ une conique osculatrice (resp. surosculatrice) de $C$. Alors $D \notin \mathfrak{C}_n(C)$.*

*Démonstration.* Un point de $v_2(C)$ (qui est l'image de $C$ par le morphisme de Veronese) correspond à une conique singulière supportée par une droite tangente à $C$. Un point de la développable de la courbe quartique $v_2(C)$ correspond à une conique singulière supportée par une tangente $l$ de $C$ réunie à une autre droite coupant $l$ au point de tangence $l \cap C$. La variété des coniques osculatrices (resp. surosculatrice) est le cône de sommet $C$ et de base la surface développable de la courbe $v_2(C)$ (resp. le cône de sommet $C$ et de base $v_2(C)$). Mais SL(2) agit transitivement sur les coniques lisses de ces deux cônes. Il en résulte que si une conique de ces cônes appartient à $\mathfrak{C}_n(C)$ tout le cône appartient à $\mathfrak{C}_n(C)$. En particulier son sommet, ce qui ne peut pas se produire d'après la proposition 4.3.2. On en déduit que $\mathfrak{C}_n(C)$ rencontre le cône osculateur le long de la développable et le cône surosculateur le long de la quartique rationnelle $v_2(C)$. $\square$

Comme je le suggérais ci-dessus, le théorème 4.3.1 permet non seulement d'aborder de manière différente le "grand théorème de Poncelet" mais aussi d'en proposer une nouvelle démonstration ([2]).

**Théorème 4.3.7** (grand théorème de Poncelet)**.** *Soient $C$ et $D$ deux coniques telles que $D$ soit $n$-circonscrite à $C$. Alors tout point général de $D$ est le sommet d'un polygone à $n$ côtés tangent à $C$ et $n$ inscrit dans $D$.*

*Démonstration.* Considérons deux coniques lisses $C$ et $D$ et supposons qu'il existe un polygone à $n$-côtés inscrit dans $D$ et circonscrit à $C$. Notons $l_1, \cdots, l_n$ les $n$-droites du polygone et $E_{2,n}$ le fibré de Schwarzenberger associé à $C$ et au diviseur (sur $C^\vee$, ou bien aux $n$-points de tangence sur $C$) défini par les $n$-droites. Alors il existe une section non nulle $s \in H^0 E_{2,n}$ dont les zéros $Z(s)$ sont exactement les sommets de cette configuration de droites.
Comme $D$ est sauteuse (ou $n$-sécante) la décomposition

$$E_{2,n} \otimes \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_D(\frac{n-2}{2}) \oplus \mathcal{O}_D(\frac{n}{2})$$

entraine l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E_{2,n} \longrightarrow \mathcal{O}_D(\tfrac{n-2}{2}) \longrightarrow 0$$

où $F$ est un fibré de rang deux sur $\mathbb{P}^2$. En déroulant la longue suite de cohomologie on vérifie immédiatement que $h^0(F) \geq 2$. Considérons donc un pinceau de section de $F$ ainsi que le pinceau de sections de $E_{2,n}$ qu'il induit.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^2 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & E_{2,n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_D(\tfrac{n-2}{2}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}_1 \arrow[r] & \mathcal{L}_2 \arrow[r] & \mathcal{O}_D(\tfrac{n-2}{2}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

[2]Voici, historiquement, le premier énoncé publié de ce théorème.

**Théorème 4.3.6** ([41], page 362)**.** *Quand un polygone est à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent de la même propriété à l'égard des deux courbes ; ou plutôt tous ceux qu'on essaierait de décrire à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient eux-mêmes sur ces courbes. Et réciproquement, s'il arrive qu'en essayant d'inscrire à volonté, à une section conique, un polygone dont les côtés en touchent une autre, ce polygone ne se ferme pas sur lui-même, il ne saurait nécessairement y en avoir d'autres qui jouissent de cette propriété.*

Le faisceau $\mathcal{L}_2$ est supporté par une courbe $\Gamma_2$ de degré $n-1$ passant par les sommets de toutes les sections du pinceau $(s,t)$. Or chacune de ces sections est formée des sommets d'une configuration de $n$-droites tangentes de $C$ (puisque $H^0(E_{2,n}) = H^0\mathcal{O}_C(\frac{n}{2})$). Cette courbe $\Gamma_2$ est une courbe de Poncelet. Le faisceau $\mathcal{L}_1$, quant à lui, est supporté par une courbe $\Gamma_1$. On en déduit $\Gamma_2 = D \cup \Gamma_1$. Donc $D$ est une composante irréductible d'une courbe de Poncelet. Chaque point de $D$ est donc le sommet d'un polygone de $n$-côtés tangents à $C$ dont les $\binom{n}{2}$ sommets sont sur $\Gamma_2$. De plus chaque point d'intersection d'une droite de la configuration avec $\Gamma_2$ est un sommet. Ainsi la configuration de droites rencontre-t-elle la conique $D$ en au moins $n$-points, chacun comptant double. $\square$

# Chapitre 5

# Annexe I

Je regroupe ici les quelques théorèmes de géométrie algébrique qui sont utilisés abondamment dans le corps du texte.

Étant donné un fibré vectoriel $F$ sur $\mathbb{P}^n$ on définit sa pente $\mu(F) = \frac{\deg(F)}{\mathrm{rg}(F)}$. Un fibré vectoriel $E$ est $\mu$-stable (resp. semi-stable) si et seulement si pour tout sous-faisceau inversible $L \hookrightarrow E$ on a $\mu(L) < \mu(E)$ (resp. $\mu(L) \leq \mu(E)$).

Soit $E$ un fibré vectoriel de rang $r$ sur $\mathbb{P}^n$. Si $l$ est une droite de $\mathbb{P}^n$ un fameux théorème de Grothendieck affirme que $E \mid l$ est une somme directe de fibrés en droites :

$$E \mid l = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_l(a_i(l)),\ a_1(l) \geq a_2(l) \geq ... \geq a_r(l).$$

Lorsque l'on étudie les fibrés vectoriels stables un des résultats fondamentaux est certainement le théorème de Grauert-Mülich-Spindler :

**Théorème 5.0.8** ([43], thm 0.1)**.** *Supposons que le corps de base soit de caractéristique nulle. Si $l$ est suffisamment générale et $E$ est $\mu$-semi-stable, alors*

$$0 \leq a_i(l) - a_{i+1}(l) \leq 1,\ 1 \leq i \leq r-1.$$

La formule de Thom-Porteous permet de calculer les classes d'homologie (et les classes dans l'anneau de Chow) du lieu de dégénérescence d'une application entre deux fibrés vectoriels. Elle est définie de la manière suivante. Soit $\phi : E \to F$ un homomorphisme de fibrés vectoriels de rangs respectifs $e$ et $f$. Le lieu de $k$-dégénérescence est $D_k(\phi) := \{x \in X | \mathrm{rg}(\phi_x) \leq k\}$. Nous avons

$$\mathrm{codim} D_k(\phi) \leq (e-k)(f-k) \tag{5.1}$$

et $\mathrm{codim} D_k(\phi) \leq (e-k)(f-k)$ dans le cas générique.

Supposons que $\mathrm{codim} D_k(\phi) = (e-k)(f-k)$, alors la formule de Thom-Porteous est

$$[D_k(\phi)] = \det\left(c_{f-k+j-i}(F \otimes E^\vee)_{1 \leq i,j \leq e-k}\right) \tag{5.2}$$

où $c_i(F \otimes E^\vee)$ est la $i$-ième classe de Chern du fibré $F \otimes E^\vee$ et on pose $c_i = 0$ si $i < 0$.

# Chapitre 6

# Annexe II

## Généralités sur les droites de saut sur le plan

Je me contente du minimum nécéssaire à la compréhension de ce manuscrit dans les rappels qui suivent sur les droites de saut.

Soit $E$ un fibré stable de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ dont les classes de Chern sont $c_1 = 0$ ou $c_1 = -1$ et $c_2 = n$. On dira que $E$ est pair lorsque $c_1 = 0$ et impair sinon. Comme le rang de $E$ égale 2, le fibré $E$ est stable (resp. semi-stable uniquement dans le cas pair) si et seulement si $H^0(E) = 0$ (resp. $H^0(E(-1)) = 0$). Le premier résultat important est celui de Grauert et Mülich :

**Théorème 6.0.9.** *Soit $E$ un fibré de rang deux semi-stable sur $\mathbb{P}^2$, que l'on choisit normalisé sans perdre en généralité, et $l$ une droite générale. Alors $E_l = \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l$ si $E$ est pair, $E_l = O_l \oplus O_l(-1)$ si $E$ est impair.*

Au-dessus ce certaines droites, appelées **droites de saut** ou **droites sauteuses**, le fibré ne se décompose pas de cette manière. Plus précisément nous pouvons décrire l'ensemble $S(E)$ des droites sauteuses de $E$ comme :

$$S(E) = \{l, H^0(E_l(-1)) \neq 0\}.$$

En remarquant que la condition cohomologique $H^0(E_l(-1)) \neq 0$ équivaut à la condition
• $H^1(E_l(-1)) \neq 0$ quand $E$ est pair,
• $H^1(E_l) \neq 0$ quand $E$ est impair,
nous pouvons munir $S(E)$ d'une structure naturelle de schéma.

Pour cela considérons la variété d'incidence "points-droites" et les projections canoniques

$$\mathbb{P}^2 \xleftarrow{p} \mathbb{F} \xrightarrow{q} \mathbb{P}^{2\vee}$$

Les droites de saut de $E$ définissent un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^{2\vee}$ qui est le support du faisceau cohérent
• $R^1q_*(p^*E(-1))$ quand $E$ est pair
• $R^1q_*p^*E$ quand $E$ est impair.

**Théorème 6.0.10** ([5], Thm 2, [35] cor. 10.7.1)**.** *Quand $E$ est pair $S(E)$ est un diviseur de degré $c_2(E)$.*
*Quand $E$ est impair $S(E)$ est un sous-schéma de $\mathbb{P}^{2\vee}$ de codimension $\leq 2$. Lorsque la codimension est 2 son degré est $\frac{n(n-1)}{2}$.*

# Morphisme de Barth

Soit $M(0,n)$ l'espace de module grossier des faisceaux cohérents semi-stables de rang 2 sur $\mathbb{P}^2$ de classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = n$ . C'est une variété projective, irréductible de dimension $4n-3$. Rappelons qu'un faisceau localement libre représentant un point de $M(0,n)$ est nécessairement stable. Notons $\mathbf{U}(0,n)$ l'ouvert des points représentant des faisceaux localement libres. Le sous-schéma fermé des classes de faisceaux singuliers est une hypersurface dans $M(0,n)$ notée $\delta M(0,n)$. Par la propriété d'espace de module grossier nous obtenons un morphisme

$$M(0,n) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2\vee}, O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(n))),\ [E] \mapsto S(E).$$

Cette application fut tout d'abord considérée par Barth. Il est bien connu que la restriction de cette application à $\mathbf{U}(0,n)$ est quasi-finie (puisque le nombre de théta-caractéristiques sur une courbe est fini), que la restriction à $\delta M(0,n)$ a des fibres de dimension $\geq 1$ ([44], rem. 1.11), et que l'image du bord est contenu dans le fermé des courbes réductibles ([44], cor. 1.10.1). Ceci implique que l'image de $M(0,n)$ par $\gamma$ est encore une variété irréducible de dimension $4n-3$.

Récemment Le Potier et Tikhomirov ont montré que le degré de l'application $\gamma : M(0,n) \longrightarrow \mathrm{Im}\gamma$ est 1 pour $n \geq 4$ ([52], thm. 1.1). Le calcul du degré de l'image est relié au calcul des nombres de Donaldson sur $\mathbb{P}^2$. Quand $n < 4$ nous savons

- Si $n = 2$ l'application est un isomorphisme.
- Si $n = 3$ cette application est surjective de degré 3.

La dimension du système linéaire $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^{2\vee}, O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(n)))$ est $\frac{n(n+3)}{2}$, et pour $n \geq 4$ nous avons $\dim M(0,n) < \frac{n(n+3)}{2}$. Quand $n = 4$ la dimension de l'espace de module est 13 et la dimension de l'espace projectif des quartiques est 14. Les courbes du diviseur $\gamma(M(0,4))$ sont appelées quartiques de Luroth ; ce sont des quartiques circonscrites à un pentagone complet. Il n'est pas facile de calculer le degré de l'hypersurface $\mathcal{L} := \gamma(M(0,4))$ (voir par exemple [52], cor. 1.2). En 1918 Frank Morley a montré que ce degré était égal à 54 ([46]). En s'appuyant sur cet article originel Ottaviani et Sernesi ont redémontré ce résultat ([50], thm. 0.1).

# Généralités sur les coniques de saut

Le théorème 6.0.12 qui suit est connu et publié par Manaresi [42]. Cependant si la preuve que je donne dans le cas impair est essentiellement la même que la sienne, celle du cas pair est différente. Manaresi passe par la courbe d'Hulek en étudiant la restriction à la surface de Veronese, tandis que je raisonne directement par la construction standard, à savoir l'incidence point-conique de $\mathbb{P}^2$.

Soit $E$ un fibré stable de rang deux sur $\mathbb{P}^2$. Nous supposons que $E$ est normalisé, c'est-à-dire que $c_1(E) = 0$ ou $c_1(E) = -1$. Soit $C$ une conique lisse de $\mathbb{P}^2$. Comme elle est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ le théorème de Grothendieck implique que $E_C = O_C(\frac{a}{2}) \oplus O_C(\frac{b}{2})$ (où $O_C(\frac{d}{2})$ désigne le fibré en droite sur $C$ de degré $d$) et $a + b = 2c_1(E)$. De plus le théorème de Grauert-Mülich implique que pour une conique générale de $\mathbb{P}^2$ nous ayons $E_C = O_C \oplus O_C$ lorsque $E$ est pair, $E_C = O_C(\frac{-1}{2}) \oplus O_C(\frac{-1}{2})$ lorsque $E$ est impair. Nous définissons ainsi les coniques de saut pour les coniques lisses. Ce sont celles dont la décomposition en faisceaux inversibles n'est pas comme ci-dessus. Comme le théorème de Grothendieck ne s'applique pas aux coniques singulières, nous devons donner une condition de saut valable pour toutes les coniques.

**Définition 6.0.11.** *Une conique $C$ est sauteuse pour $E$ si et seulement si*

$$\begin{cases} E_C \neq 2O_C & \text{lorsque } c_1 = 0 \\ h^0(E_C) \neq 0 & \text{lorsque } c_1 = -1. \end{cases}$$

On note $J(E)$ l'ensemble des coniques sauteuses de $E$.

**Théorème 6.0.12** ([42] thm. 1.8)**.** *Soit $E$ un fibré vectoriel stable de rang deux normalisé. Alors, $J(E)$ est un diviseur de $\mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^2}(2)))$ et $\deg J(E) = c_2 + c_1$.*

*Démonstration.* Considérons la variété d'incidence point-conique de $\mathbb{P}^2$. C'est un diviseur $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$ défini ensemblistement par

$$\mathbb{F} = \{(x, C) \mid x \in C\}$$

et schématiquement par l'équation

$$X_0^2 Y_0 + X_0 X_1 Y_1 + X_0 X_2 Y_2 + X_1^2 Y_3 + X_1 X_2 Y_4 + X_2^2 Y_5 = 0.$$

On note $p$ et $q$ les projections sur $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^5$ respectivement. Nous retrouvons ainsi la résolution de $\mathbb{F}$ dans l'espace produit $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$

$$0 \to O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5}(-2, -1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5} \longrightarrow O_{\mathbb{F}} \to 0.$$

Supposons tout d'abord que $E$ est impair. Après tensorisation de cette résolution par $p^*E$ nous prenons son image directe sur $\mathbb{P}^5$ et nous obtenons

$$0 \to H^1E(-2) \otimes O_{\mathbb{P}^5}(-1) \longrightarrow H^1E \otimes O_{\mathbb{P}^5} \longrightarrow R^1 q_* p^* E \to 0$$

En effet le théorème de Grauert-Mülich implique que $q_* p^* E = 0$. Comme $h^1E(-2) = h^1E = c_2 - 1$ le support de $R^1 q_* p^* E$ est un diviseur de degré $c_2 - 1$.

Supposons maintenant que $E$ soit pair. Le faisceau $q_*p^*E$ est un faisceau réflexif de rang 2 sur $\mathbb{P}^5$. Sa première classe de Chern est $-c_2$. En effet, considérons la suite exacte suivante

$$0 \to q_*p^*E \to H^1E(-2) \otimes O_{\mathbb{P}^5}(-1) \to H^1E \otimes O_{\mathbb{P}^5} \longrightarrow R^1q_*p^*E \to 0.$$

Comme $h^1E(-2) = c_2$ et $h^1E = c_2 - 2$ la codimension du support de $R^1q_*p^*E$ est génériquement 3. Soit $l$ une droite générale de $\mathbb{P}^5$ (ici générale implique que $l$ ne rencontre ni le support de $R^1q_*p^*E$ ni le lieu singulier de $q_*p^*E$, qui certainement coïncident). Alors la restriction de la suite exacte précédente est

$$0 \to q_*p^*E \otimes O_l \to H^1E(-2) \otimes O_l(-1) \to H^1E \otimes O_l \to 0.$$

Ce qui prouve que $c_1(q_*p^*E) = -c_2$.

L'application canonique (évaluation) $ev : q^*q_*p^*E \to p^*E$ devient au-dessus d'une conique $C$

$$O_C \oplus O_C \longrightarrow E_C$$

Par conséquent $ev$ s'annule au-dessus des coniques de saut. Mais le schéma des zéros de $ev$ est défini par son déterminant qui est une hypersurface de degré $c_1(p^*E) - c_1(q^*q_*p^*E) = (0, c_2)$ donc elle correspond à une hypersurface de degré $c_2$ dans $\mathbb{P}^5$. $\square$

## Les coniques singulières

Nous notons $\mathcal{S}$ la sous-variété (définie par l'annulation d'une matrice $3 \times 3$ symétrique générique par exemple) des coniques singulières. Soient $l_1 \cup l_2$ la conique singulière formée de deux droites distinctes et $l^2$ celle supportée par la droite $l$. Lorsque la première classe de Chern de $E$ est paire, Manaresi vérifie :

**Proposition 6.0.13.** *Si $E$ est pair, alors*
*a) $l_1 \cup l_2$ est une conique de saut si et seulement si au moins une des deux droites est sauteuse pour $E$.*
*b) $l^2$ est une conique de saut si et seulement si $l$ est une droite de saut.*

Pour le cas impair les choses se compliquent. Il est facile de montrer :

**Proposition 6.0.14.** *Supposons que $E$ soit impair. Si une au moins des deux droites $l_i$ est sauteuse pour $E$ alors $l_1 \cup l_2$ est une conique de saut pour $E$.*

Nous avons $\dim(J(E) \cap \mathcal{S}) = 3$ tandis qu'en général $\dim(\mathbb{P}^{2\vee} \times S(E)) = 2$ ce qui montre que l'implication inverse est fausse.

La proposition suivante est un corollaire du théorème de Hulek ([35], prop. 9.1) qui affirme qu'une droite de saut de $E$ est une droite singulière du second type (en d'autres termes, elle est un point singulier de la courbe de Hulek). En effet $J(E) \cap v_2(\mathbb{P}^2)$ est exactement l'image de la courbe de Hulek (notée $C(E)$) par le morphisme de Veronese.

**Proposition 6.0.15.** *Si $E$ est impair et $l$ est une droite de saut alors $l^2$ est une conique de saut.*

# Bibliographie


[V1] Vallès, J. : Complexes inattendus de droites de saut. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 321 (1995), no. 1, 87–90.

[V2] Vallès, J. : Fibrés de Schwarzenberger et coniques de droites sauteuses, Bull. Soc. Math. France 128, (2000), 433-449.

[V3] Vallès, J. : Nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner, Math. Z. 233, (2000), no.3, 507–514.

[V4] Vallès, J. : Hyperdéterminant d'un SL(2)-homomorphisme, Ann. Math. Blaise Pascal 15, (2008), 81–86.

[V5] Vallès, J. : Variétés de type Togliatti. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 343 (2006), no. 6, 411–414.

[V6] Vallès, J. : Porisme de Poncelet et coniques de saut. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), no. 6, 567–570.

[V7] Vallès, J. : Fibrés logarithmiques sur le plan projectif. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 16 (2007), no. 2, 385–395.

[V8] Ilardi, G., Supino, P., Vallès, J. : Geometry of syzygies via Poncelet varieties. BUMI, serie XI, vol.II, no. 3, (2009), 579–589.

[V9] Vallès, J. : Fibrés provenant d'un revêtement double du plan projectif. Ann. Inst. Fourier 59, no. 5 (2009), 1897–1916.

[V10] Vallès, J. : Fibrés logarithmiques et Schwarzenberger généralisés. En cours de parution à Math. Z.

[1] Alain : Propos sur l'éducation (LVIII).

[2] Alexander, J., Hirschowitz, A. : Polynomial interpolation in several variables, J. Alg. Geom. 4 (1995), 201–222.

[3] Ancona, V., Ottaviani, G. : Unstable hyperplanes for Steiner bundles and multidimensional matrices, Advances in Geometry, 1, no. 2, (2001), 165–192.

[4] Arrondo, E. : Schwarzenberger bundles of arbitary rank on the projective space. Preprint. arXiv.org, math.AG/0807.1645.

[5] Barth, W. : Moduli of vector bundles on the projective plane, Inv. Math. 42 (1977), 63–91.

[6] Berger, M. Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob. Cassini (2009).

[7] Barth, W., Bauer, Th. : Poncelet theorems. Expo. Math. 14-2 (1996), 125–144.

[8] Bateman, H. : The quartic curve and its inscribed configurations, Amer. J. Math. 36 (1914), no. 4, 357–386.

[9] Brambilla, C., Ottaviani, G. : On the Alexander-Hirschowitz theorem. J. Pure Appl. Algebra 212(5), (2008), 1229–1251.

[10] Borel, A., Serre, J.-P. : Le théorème de Riemann Roch, Bull. Soc. Math. France, 86 (1958), 97–126.

[11] Bos, H.J.M., Kers, C., Oort, F., Raven, D.W. : Poncelet's closure theorem, its history, its modern formulation, a comparison of its modern proof with those by Poncelet and Jacobi, and some mathematical remarks inspired by these early proofs. Expo. Math. 5 (1987 ), 289–364.

[12] Caporaso, L., Sernesi, E. : Recovering plane curves from their bitangents. J. Algebraic Geom. 12 (2003), no. 2, 225–244.

[13] Chang, M-C. : A bound on the order of jumping lines. Math. Ann. 262 (1983), no. 4, 511–516.

[14] Chateaubriand, A. : Mémoires d'outre tombe, édition du livre de poche.

[15] Coandă, I. : On Barth's restriction theorem. J. Reine Angew. Math. 428 (1992), 97–110.

[16] Coandă, I. : About restricting 2-bundles on $\mathbb{P}^3$ to planes. Math. Ann. 291 (1991), no. 1, 147–152.

[17] Darboux, G. : Principes de géométrie analytique. Paris, Gauthier-Villars, 1917.

[18] Dionisi, C. : Stabilizers for nondegenerate matrices of boundary format and Steiner bundles. Rev. Mat. Complut. 17 (2004) 459–469.

[19] Dolgachev, I. : Topics in Classical Algebraic Geometry Part I. Sur la page http ://www.math.lsa.umich.edu/idolg.lecturenotes.html.

[20] Dolgachev, I. : Logarithmic sheaves attached to arrangements of hyperplanes. J. Math. Kyoto Univ. 47, (2007), 35–64.

[21] Dolgachev, I., Kapranov, M. : Schur quadrics, cubic surfaces and rank 2 vector bundles over the projective plane. Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992). Astérisque no. 218 (1993), 111–144.

[22] Dolgachev, I., Kapranov, M. : Arrangements of hyperplanes and vector bundles on $\mathbb{P}^n$. Duke Math. J. 71 (1993), no. 3, 633–664.

[23] Franco, D., Ilardi, G. : On a theorem of Togliatti. Preprint n.9 (2001) Università degli studi di Napoli "Federico II".

[24] Griffiths, P., Harris, J. : On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism. Enseign. Math. (2) 24 (1978), no. 1-2, 31–40.

[25] Gruson, L., Peskine, C. : Space curves : complete series and speciality. 108–123, Lecture Notes in Math., 1266, Springer, Berlin, 1987.

[26] Gruson, L., Peskine, C. : Courbes de l'espace projectif, variétés de sécantes. Enumerative geometry, Progress in Math. 24 (1982), 1–33.

[27] Gelfand, I. M., Kapranov, M., Zelevinsky, A. V. : Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1994).

[28] Gau, H.L., Wu, P.Y. Numerical range and Poncelet property. Taiwanese J. Math. 7 (2003), no. 2, 173–193.

[29] Harris, J. : Algebraic geometry : A First course. 133, Springer Verlag, 1992.

[30] R. Hartshorne, Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, no. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[31] Hartshorne, R. : Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$. Math. Ann. 238 (1978), no. 3, 229–280.

[32] Halphen, G. : Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Paris, Gauthier-Villars 1886-1891.

[33] Han, F. : Geometrically reducible line complexes. Math. Ann. 316 (2000), no. 4, 819–824.

[34] Hitchin, N. J. : Poncelet polygons and the Painlevé equations. Geometry and analysis (Bombay, 1992), 151–185, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1995.

[35] Hulek, K., Stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}^2$ with $c_1$ odd, Math. Ann.**264** (1979), 241–266.

[36] Ilardi, G. : Rational varieties satisfying one or more Laplace equations. Ricerche di Matematica vol.XLVIII, fasc. 1, (1999), 123–137.

[37] Ilardi, G., Supino, P. : Linear systems on $\mathbb{P}^1$ with syzygies. Communications in Algebra, 34 (2006).

[38] Lanteri, A. , Mallavibarrena, R. : Osculatory behavior and second dual varities of Del Pezzo surfaces. Advances in Geometry Vol 2, Issue 4 (2002).

[39] Levi, M., Tabachnikov, S. : The Poncelet grid and billiards in ellipses. Amer. Math. Monthly 114 (2007), no. 10, 895–908.

[40] Le Potier, J. : Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques, London Math.Soc., Lecture Notes Series 179 (1992), 213–240.

[41] Poncelet, J. V. : Traité des propriétés projectives des figures, Bachelier Libraire. Edition de 1822.

[42] Manaresi, M. : On the jumping conics of a semistable rank two vector bundle on $\mathbb{P}^2$. Manuscripta math. **69** (1990), 133–151.

[43] Maruyama, M. : The theorem of Grauert-Mulich-Spindler. Math. Ann. 255 (1981), 317–333.

[44] Maruyama, M. : Singularities of the curve of jumping lines of a vector bundle of rank-2 on $\mathbb{P}^2$. Algebraic Geometry, Proc. of Japan-France Conf (1982), Lectures Notes in Mathematics, vol. 1016, (1983), 370–411.

[45] Mneimné, R. : éléments de géométrie, actions de groupes, Cassini.

[46] Morley, F. : On the Lüroth Quartic Curve, American J. of Math. 41 (1919), 279–282.

[47] Ottaviani, G. : Alcune proprietà dei 2-fibrati su $\mathbb{P}^2$, Boll. Un. Mat. Ital. D (6) 3 (1984), no. 1, 5–18.

[48] Ottaviani,G. un invariant regarding Waring problem for cubi polynomials. Nagoya Math. J., 193 (2009). 95–110.

[49] Ottaviani, G. ; Rubei, E. : Resolutions of homogeneous bundles on $\mathbb{P}^2$. Ann. Inst. Fourier, 55 (2005), no. 3, 973–1015.

[50] Ottaviani, G. ; Sernesi, E. : On the hypersurface of Lüroth quartics, ArXiv :0903.5149.

[51] Ottaviani, G. , Vallès, J. : Notes du cours donné à Wykno.

[52] Le Potier, J., Tikhomirov, A. : Sur le morphisme de Barth. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34 (2001), no. 4, 573–629.

[53] U. Persson, Double coverings and surfaces of general type, Algebraic geometry (Proc. Sympos., Univ. Tromsø, Tromsø, 1977), p. 168–195, Lecture Notes in Math., 687, Springer, Berlin, 1978.

[54] Piene, R. : A note on higher order dual varieties, with an application to scrolls. Proc. Symp. Pure math. 40 (1983), Part 2, 335–342.

[55] Ramella, L. : La stratification du schema de Hilbert des courbes rationnelles de $\mathbb{P}^n$ par le fibré tangent restreint, C.R. Acad. Sci. Paris 311 (1990) 181–184.

[56] Schenck, H. K., Elementary modifications and line configurations in $\mathbb{P}^2$, Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 3, 447–462.

[57] Schwartz, R. E. : The Poncelet grid. Adv. Geom. 7 (2007), no. 2, 157–175.

[58] R. L. E. Schwarzenberger, Vector bundles on the projective plane, Proc. London Math. Soc. 11, (1961), 623–640.

[59] Shifrin, T. : The osculatory behaviour of surfaces in $\mathbb{P}^5$. Pacific J. Math. 123 (1986), 227–256.

[60] Spindler, H., Trautmann, G. : Rational normal curves and the geometry of special instanton bundles on $\mathbb{P}^{2n+1}$. Math. Gottingensis 18, (1987).

[61] Togliatti, E. : Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un'equazione di Laplace. Comm.Math.Helv. vol I (1929), 255–272.

[62] Tolstoï, A. : Guerre et Paix, édition du livre de poche.

[63] Trautmann, G. : Poncelet curves and associated theta characteristics. Expo. Math. 6 (1998), 29–64.

[64] Weil, S. : La pesanteur et la grâce. Plon coll. "Agora", 1991.