Porisme de Poncelet et coniques de saut

Poncelet's porism and jumping conics

Jean Vallès

RÉSUMÉ.— On montre dans cette note que les coniques de saut des fibrés introduits par Schwarzenberger dans [7] sont les coniques "circonscrites" à une conique donnée. Ce résultat permet de mieux comprendre la notion de coniques singulières "circonscrites".

ABSTRACT.— We show that the jumping conics of Schwarzenberger's bundles [7] are the "circumscribed" conics to a given conic. Thanks to this result we can understand what is a "circumscribed" singular conic.

1 Introduction

Soit D une conique lisse de $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On dira qu'une conique lisse C est n-circonscrite à D s'il existe un polygone à n cotés inscrit dans C et circonscrit à D. Le théorème de Poncelet affirme alors qu'il existe une infinité de tels polygones, en d'autres termes que tout point de C est le sommet d'un polygone à n cotés vérifiant cette propriété. Les nombreuses démonstrations de ce résultat sont regroupées dans l'article [2]. Il semble que Cayley soit le premier à avoir donné une condition explicite exprimant qu'une conique est n-circonscrite à une autre ; cette condition fait apparaître que l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des coniques n-circonscrites à D est une hypersurface de l'espace projectif des coniques et permet de déterminer l'équation de cette hypersurface (voir l'article "On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism" de Griffiths et Harris, [3]). Cette hypersurface n'est évidemment pas irréductible dès qu'il existe un entier naturel r vérifiant $3 \leq r < n$ et divisant n (elle contient alors l'hypersurface des coniques r-circonscrites à D). Il est naturel d'introduire alors l'hypersurface M_n des coniques strictement n-circonscrites à D (strictement voulant dire que le polygone à n cotés n'est pas décomposable en polygones plus petits). Barth et Bauer calculent le degré de M_n ([1], Thm 3.3) à la suite, entre autre, de Halphen ([4] chap. IV première partie et chap. X deuxième partie). Il résulte immédiatement de leur démonstration que M_n est réduite et que le degré de $\mathcal{C}_n$ est la somme des degrés des hypersurfaces M_r pour $3 \leq r < n$ et $r \mid n$, à savoir $\frac{n^2-4}{4}$ lorsque n est pair, $\frac{n^2-1}{4}$ lorsque n est impair. Comme $M_n \cap M_m$ pour $m \neq n$ ne contient que des coniques singulières d'après le théorème de Poncelet cité plus haut, on en déduit que $\mathcal{C}_n = \bigcup_{r \geq 3, r|n} M_r$ et que $\mathcal{C}_n$ est réduite.

Définition 1.1 *(d'après Manaresi [6]) Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel stable de rang deux normalisé (i.e. $c_1(\mathcal{E}) = 0$ ou -1) sur le plan projectif complexe. Une conique C est une conique de saut pour $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E}_C \neq 2O_C$ lorsque $c_1 = 0$ ou $h^0(\mathcal{E}_C) \neq 0$ lorsque $c_1 = -1$.*

On note $J(\mathcal{E})$ l'ensemble des coniques de saut. C'est une hypersurface de $\mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^2}(2)))$ de degré $\deg J(\mathcal{E}) = c_2 + c_1$ (où $c_2 = c_2(\mathcal{E})$ et $c_1 = 0$ ou -1, [6] thm 1.8).

Dans $\mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^2}(2)))$ une autre hypersurface est naturellement attachée à la conique D, c'est l'hypersurface $J(E_n)$ des coniques de saut du fibré de Schwarzenberger, associé à D, de classes de Chern $c_1(E_n) = n-1$ et $c_2(E_n) = \binom{n}{2}$. Rappelons à ce sujet que lorsque $n \geq 3$ les droites de saut de E_n (i.e. les droites L telles que $h^0(E_{n|L}(-[\frac{n}{2}]-1)) \neq 0$) sont les droites tangentes à D ([7], prop.8). Enfin par construction E_n est invariant sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Aut}(D)$. Pour plus d'informations je renvoie le lecteur à [7], [8], [9].

— Nous montrons tout d'abord que $J(E_n) = \mathcal{C}_n$ (thm. 2.1).
— Puis nous explicitons le lieu des coniques singulières n-circonscrites à D (thm. 2.2) et des coniques singulières de saut de E_n (coro. 2.4).

Bien entendu on ne parlera de coniques de saut de E_n et de coniques n-circonscrites que pour $n \geq 3$.

1.0.1 Quelques notations.

Considérons le morphisme $\psi : \mathbb{P}^{2\vee} \times \mathbb{P}^{2\vee} \to \mathbb{P}^5$ qui a un couple de droites associe la conique union des deux droites. On considère le solide $\psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee)$ constitué des coniques singulières dont l'une au moins des droites du support est tangente à D. Le morphisme ψ restreint à la diagonale est le morphisme de Veronese $v : \mathbb{P}^{2\vee} \hookrightarrow \mathbb{P}^5$. Rappelons que la variété $\mathrm{Sec}(v(D^\vee))$ des bisécantes de $v(D^\vee)$ est un solide de degré 3 obtenu en intersectant l'hypersurface des coniques singulières $\psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times \mathbb{P}^{2\vee})$ (qui est aussi la variété $\mathrm{Sec}(v(\mathbb{P}^{2\vee}))$ des bisécantes à la Veronese) et l'hyperplan engendré par $v(D^\vee)$.

Etant donnés une conique lisse Γ et un point $x \notin \Gamma$, une droite générale passant par x coupe Γ en deux points distincts. L'homographie qui échange ces deux points est appelée involution de Frégier sur Γ associée au point x.

Notons $\mathfrak{P}_m$ l'ensemble des racines primitives m-ième de l'unité et $\phi(m)$ son cardinal.

2 Coniques de saut d'un fibré de Schwarzenberger.

Théorème 2.1 $J(E_n) = \mathcal{C}_n$

Preuve. On remarque avant toute chose que les deux hypersurfaces ont même degré et que l'hypersurface des coniques n-circonscrites est réduite. Il suffit donc de montrer l'inclusion $\mathcal{C}_n \subset J(E_n)$ sur l'ouvert des coniques lisses.

Soit C une conique lisse n-circonscrite à D. Les $\binom{n}{2}$ sommets définis par la donnée des n droites tangentes à D sont les zéros d'une section $s \in H^0(E_n)$ ([9], proposition 1.4). La restriction de la suite exacte

$$0 \to O_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{s} E_n \longrightarrow I_{Z(s)}(n-1) \to 0$$

à la conique C prouve que $E_{n|C} = O_C(\frac{n}{2}) \oplus O_C(\frac{n-2}{2})$. $\square$

Le diviseur $J(E_n)$ contient des coniques singulières. Lorsque n est impair les coniques dont une droite du support est tangente à D sont les seules ([6], remarque 1.2 et lemme 1.3). Lorsque n est pair celles-ci sont encore sauteuses mais il peut y en avoir d'autres. Nous nous proposons de déterminer lesquelles dans cette deuxième partie. Pour le faire nous étudions les intersections $M_n \cap \{\text{coniques singulières}\}$

2.1 Les coniques singulières de saut.

Soit C une conique singulière rencontrant D en quatre points distincts. Comme deux quadruplets de points de D ont mêmes birapports λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ et $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ si et seulement s'ils sont équivalents sous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on en déduit que deux coniques singulières associées aux birapports $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$ où $\lambda \in \mathbb{C}-\{0,1\}$ sont dans une même orbite sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Notons C_λ un représentant de cette orbite. La fonction $c(\lambda) = (\frac{\lambda+1}{\lambda-1})^2$ est invariante par la transformation $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$. On associe de cette façon le nombre complexe $c(\lambda) \neq 1$ à la conique C_λ. On note $\Omega_{c(\lambda)}$ l'orbite sous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de la conique C_λ.

Le nombre complexe $c(\lambda)$ est nul si et seulement si le birapport des quatre points sur D est -1. Dans ce cas les deux droites formant la conique singulière C sont conjuguées harmoniquement i.e. C appartient à un pinceau de coniques (l^2, d^2) où l et d sont tangentes à D. Cette remarque prouve que $\bar{\Omega}_0 = \mathrm{Sec}(v(D^\vee))$.

Théorème 2.2 *Les coniques singulières strictement circonscrites à D sont :*
(i) $[M_{2n+1} \cap \mathrm{Sec}(v(\mathbb{P}^{2\vee}))]_{\mathrm{red}} = \psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee)$
(ii) $[M_{2n} \cap \mathrm{Sec}(v(\mathbb{P}^{2\vee}))]_{\mathrm{red}} = \psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee) \cup \bigcup_{z\in\mathfrak{P}_{2n}} \bar{\Omega}_{(\frac{1+z^2}{2z})^2}$

Remarque. La fraction $(\frac{1+z^2}{2z})^2$ est invariante par les transformations $z \mapsto -z$ et $z \mapsto \frac{1}{z}$. On en déduit que lorsque z parcourt $\mathfrak{P}_{2n}$, la fonction $(\frac{1+z^2}{2z})^2$ ne prend que $\phi(n)$ valeurs distinctes.

Preuve. On montre tout d'abord que $\psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee) \subset M_n$. Les deux hypersurfaces M_n et $\mathrm{Sec}(v(\mathbb{P}^{2\vee}))$ se rencontrent le long d'un solide, sinon tout point de la Veronese serait une conique de saut de E_n ce qui contredirait les résultats de Manaresi et de Hulek ([6], remarque 1.2, lemme 1.3 et [5], Thm 3.2.2).

De plus si une conique singulière appartient à M_{2n+1} elle est une conique de saut de E_{2n+1}, par conséquent une droite de son support est tangente à D. Comme $M_{2n+1} \cap \mathrm{Sec}(v(\mathbb{P}^{2\vee}))$ est invariant sous l'action de $SL_2(\mathbb{C})$ on en déduit (i).

Les deux hypersurfaces M_{2n} et M_{2n-1} se rencontrent le long d'un solide formé de coniques singulières. D'après (i) on en déduit que $[M_{2n} \cap M_{2n-1}]_{\mathrm{red}} = \psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee)$, et donc $\psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee) \subset M_{2n}$.

On conclut en utilisant le lemme suivant

Lemme 2.3 *Soient l et d deux droites de $\mathbb{P}^2$ avec $l^\vee, d^\vee \notin D^\vee$, u (resp v) l'involution de Frégier définie sur $D^\vee$ par le point $l^\vee$ (resp $d^\vee$).*
Les conditions suivantes sont équivalentes ($n \geq 2$) :
i) $C = l \cup d \in M_{2n}$
ii) $(uv)^{n-1} \neq id$ *et* $(uv)^n = id$
iii) $l \cup d \in \bigcup_{z\in\mathfrak{P}_{2n}} \Omega_{(\frac{1+z^2}{2z})^2}$

Preuve. On montre $i) \Leftrightarrow ii)$ puis $ii) \Leftrightarrow iii)$.
Si uv est d'ordre n le résultat est évident.
Réciproquement, l'existence d'un polygone circonscrit à D implique l'existence d'un polygone (dual) inscrit dans $D^\vee$. Soit x un des $2n$ sommets de ce polygone inscrit, on a $(uv)^n(x) = x$. Comme $2n \geq 3$ on en déduit que uv est d'ordre n. Ce qui prouve l'équivalence de $i)$ et $ii)$.

Montrons tout d'abord que $l \cup d$ rencontre D en quatre points distincts. Sinon les involutions u et v définies par les points $l^\vee$ et $d^\vee$ ont un point fixe commun car la droite passant par ces deux points et tangente à $D^\vee$. De plus ce point fixe commun est l'unique point fixe du produit uv, ce qui prouve que uv est une translation, i.e. n'est pas d'ordre n. On en déduit que $l \cup d \in \Omega_\eta$ pour un nombre complexe η. Soit z un complexe vérifiant $\eta = (\frac{1+z^2}{2z})^2$. Quitte à identifier $D^\vee$ et $\mathbb{P}^1$, on peut supposer que $l \cap D = \{(1,i),(1,-i)\}$ et $(1, iz) \in d \cap D$. Étant donné que l'invariant associé à $l \cup d$ est $(\frac{1+z^2}{2z})^2$ un birapport des quatre points d'intersection $(l \cup d) \cap D$ est $(\frac{1-z}{1+z})^2$. Le deuxième point fixe de v est donc $(1, -iz)$. Les involutions sont alors

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit uv est d'ordre n si et seulement si z est une racine $2n$-ième primitive de l'unité, ce qui prouve l'équivalence de *ii*) et *iii*). $\square$

Corollaire 2.4 *Les coniques singulières de saut sont*
(i) $[J(E_{2n+1}) \cap \mathrm{Sec}(v(\mathbb{P}^{2\vee}))]_{\mathrm{red}} = \psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee)$
(ii) $[J(E_{2n}) \cap \mathrm{Sec}(v(\mathbb{P}^{2\vee}))]_{\mathrm{red}} = \psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee) \cup \bigcup_{k\geq 2, k|n} \bigcup_{z \in \mathfrak{P}_{2k}} \bar{\Omega}_{(\frac{1+z^2}{2z})^2}$

Preuve. Les points (i) et (ii) sont des conséquences immédiates du théorème précédent et du fait que $J(E_n) = \bigcup_{r \geq 3, r|n} M_r$. $\square$

Enfin, on montre sans difficulté la proposition suivante qui exprime que les coniques de $\psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee)$ sont "plus" sauteuses que les autres.

Proposition 2.5 *Toute conique* $\Gamma \notin \psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee)$ *vérifie* $h^0(E_{n|\Gamma}(-[\frac{n}{2}] - 1)) = 0$.
Si $\Gamma \in \psi(\mathbb{P}^{2\vee} \times D^\vee)$ *on a* $h^0(E_{n|\Gamma}(2-n)) \neq 0$ et $h^0(E_{n|\Gamma}(1-n)) = 0$.

Références

[1] Barth, W.,Bauer, Th., *Poncelet theorems*, Expo. Math. **14-2** (1996), 125-144.

[2] H.J.M.Bos,C.Kers,F.Oort,D.W.Raven, *Poncelet's closure theorem, its history, its modern formulation, a comparison of its modern proof with those by Poncelet and Jacobi, and some mathematical remarks inspired by these early proofs* Expo. Math. **5** (1987), 289-364.

[3] Griffiths,P., Harris,J., *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, L'enseignement mathématique **24** (1978), 31-40.

[4] Halphen, G.H., *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.* 3 volumes Gauthier-Villars, Paris (1886-1891)

[5] Hulek, K., *Stable rank-2 vector bundles on* $\mathbb{P}^2$ *with* c_1 *odd*, Math. Ann.**264** (1979), 241-266.

[6] Manaresi, M., *On the jumping conics of a semistable rank two vector bundle on* $\mathbb{P}^2$, Manuscripta math. **69** (1990), 133-151.

[7] Schwarzenberger, R.L.E., *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.

[8] Trautmann, G., *Poncelet curves and associated theta characteristics*, Expo. Math. **6** (1988), 29-64.

[9] Vallès, J., *Fibrés de Schwarzenberger et coniques de droites sauteuses*, Bull.Soc.Math. France, **128**, (2000), 433-449.

Vallès Jean
Université de Versailles St-Quentin en Yvelines
Laboratoire de Mathématiques LAMA
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles
mel : valles@math.uvsq.fr
tel : 01 39 25 36 23
fax : 01 39 25 46 45