Fibrés de Schwarzenberger
et fibrés logarithmiques généralisés

Jean Vallès

Résumé

On propose une généralisation des fibrés logarithmiques et des fibrés de Schwarzenberger sur $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ en rang plus grand que n. Les premiers sont associés à des ensembles finis de points de $\mathbb{P}^{n\vee}$ et les seconds à des courbes de degré plus grand que n sur $\mathbb{P}^{n\vee}$. Sur le plan projectif, nous montrons que deux fibrés logarithmiques généralisés sont isomorphes si et seulement s'ils sont associés au même ensemble de points ou bien si les deux ensembles de points sont sur une même courbe de degré égal au rang des fibrés.

Abstract

We propose a generalization of logarithmic and Schwarzenberger bundles over $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ when the rank is greater than n. The first ones are associated to finite sets of points on $\mathbb{P}^{n\vee}$ and the second ones to curves with degree greater than n on $\mathbb{P}^{n\vee}$. On the projective plane we show that two logarithmic bundles are isomorphic if and only if they are associated to the same set of points or if the two sets of points belong to a curve of degree equal to the rank of the considered bundles.

Mots clés : fibrés logarithmiques généralisés, hyperplans instables, variété d'incidence.

1 Introduction

Les fibrés de Schwarzenberger (introduits par Schwarzenberger [7]) et les fibrés logarithmiques (introduits en toute généralité par Deligne [3] et étudiés sur $\mathbb{P}^n$ par Dolgachev et Kapranov [5]), possédant une géométrie très riche, ont fait et font encore l'objet de nombreux travaux. Ce sont des fibrés vectoriels de rang n sur $\mathbb{P}^n$. Dans cet article nous en proposons une généralisation ainsi qu'une étude en rang plus grand que n.

Nous rappelons pour commencer (section 2), les définitions des fibrés de Schwarzenberger, des fibrés logarithmiques et le théorème "de type Torelli" qui fait le lien entre les deux. Ce théorème a été énoncé et prouvé par Dolgachev et Kapranov ([5], thm. 7.2).

À un groupe de point Z de $\mathbb{P}^{n\vee}$ en position linéaire générale, on associe un fibré de rang n sur $\mathbb{P}^n$, appelé fibré logarithmique. Nous montrons (section 3) que ce fibré vectoriel est l'image directe sur $\mathbb{P}^n$ de l'image inverse du faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_Z(1)$ sur la variété d'incidence points-hyperplans de $\mathbb{P}^n$ (prop. 3.2). Ceci donne une description globale des fibrés logarithmiques en fonction du groupe de points Z. Qui plus est, cette description globale apporte avec elle une généralisation naturelle des fibrés logarithmiques en rang plus grand que n (en considérant les faisceaux $\mathcal{J}_Z(r+1)$, pour $r \geq 0$).

Les fibrés de Schwarzenberger de rang n sur $\mathbb{P}^n$ sont associés aux courbes rationnelles normales (donc aux courbes non dégénérées de degré n) de $\mathbb{P}^{n\vee}$. Plus généralement, nous associons des fibrés de Steiner de rang $n+r$ (avec $r \geq 0$) à des courbes de degrés $n+r$ sur $\mathbb{P}^{n\vee}$ (section 4).

Nous revenons ensuite (section 5) sur la définition et caractérisation cohomologique des hyperplans instables d'un fibré de Steiner (lorsque le rang égale n, voir [1] ou [10]). En particulier, nous étudions les hyperplans instables des logarithmiques et Schwarzenberger généralisés.

Enfin, dans la dernière partie (section 6), nous montrons (théorème 6.4) un théorème de "type Torelli" qui généralise sur le plan projectif celui de Dolgachev et Kapranov. Cette généralisation dit en substance :

Soient Z et Z' deux groupes de points de $\mathbb{P}^{2\vee}$ tels que $E_{r+1}(Z) \simeq E_{r+}(Z')$ (où $E_{r+1}(Z)$ désigne le fibré logarithmique généralisé associé à Z). Alors un des deux cas suivants se produit :
1) $Z = Z'$.
2) Z et Z' sont sur une même courbe X_{r+2} de degré $r+2$ et il existe un faisceau $\mathcal{L}$ de rang 1 sur X_{r+2} tel que $E_{r+1}(Z) \simeq E(X_{r+2}, \mathcal{L})$ (où $E(X_{r+2}, \mathcal{L})$ désigne un fibré de Schwarzenberger généralisé).

Ce travail a été réalisé lors de mon séjour dans les locaux de l'université Ulisse Dini de Florence, que je remercie pour son hospitalité. Ce séjour fut partiellement financé par GNSAGA-INdAM (Italie) et principalement par le CNRS (France) qui m'accueillait en délégation.

2 Rappels

Avant toute généralisation, nous rappelons dans cette section les définitions des fibrés logarithmiques, de Steiner et de Schwarzenberger. Pour aller plus loin, les références principales sont les articles [5] et [7].

Étant donnés une variété projective lisse X et un diviseur à croisement normaux D sur X, on définit le fibré $\Omega_X(\log(D))$ des 1-formes différentielles à pôles au plus logarithmiques le long de D. Lorsque X est l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ et $D = \cup_{i=1}^k H_i$ une union d'hyperplans en position linéaire générale, ces fibrés sont définis (par Deligne dans l'article [3]) comme l'extension particulière qui suit :

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log(D)) \xrightarrow{\text{res}} \oplus_{i=1}^k O_{H_i} \to 0.$$

L'application res étant donnée localement par l'application résidu de Poincaré (pour une définition explicite voir [5], prop. 2.3).

Dans la suite du texte on préfèrera la notation "duale" :

Définition 2.1. *Soient $H_1, \cdots, H_k$ des hyperplans de $\mathbb{P}^n$ en position linéaire générale et $Z = \{H_1^\vee, \cdots, H_k^\vee\} \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ l'ensemble des points duaux. On appelle fibré logarithmique associé à Z, le fibré*

$$E(Z) := \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log(\cup_{i=1}^k H_i)).$$

Lorsque le cardinal de $Z \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ est plus grand que $n+2$, le fibré logarithmique $E(Z)$ appartient à une famille plus large de fibrés, appelés fibrés de Steiner, dont nous rappelons la définition.

Définition 2.2. *Soient n, m, r trois entiers avec $n > 0$, $r \geq 0$ et $m > 0$. On note $\mathcal{FS}_{n,n+r,m}$ (resp. $\mathcal{S}_{n,n+r,m}$) l'ensemble des faisceaux cohérents E (resp. des fibrés vectoriels) admettant une résolution du type :*

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n}^m(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n}^{m+n+r} \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

On les appellera faisceaux de Steiner (resp. fibrés de Steiner).

Par exemple, lorsque $Z \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ est un groupe de points en position linéaire générale de cardinal $k \geq n+2$, Dolgachev et Kapranov ont montré ([5], thm. 3.5) que $E(Z) \in \mathcal{S}_{n,n,k-n-1}$ (pour $k = n+2$, c'est le fibré tangent $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$).
Les fibrés de Schwarzenberger, introduits par Schwarzenberger ([7], thm. 4), sont eux aussi des fibrés de Steiner de rang n sur $\mathbb{P}^n$. De plus, ils sont complètement définis par la donnée d'un faisceau inversible sur la courbe rationnelle normale $C_n \subset \mathbb{P}^{n\vee}$. Ils héritent ainsi d'une géométrie très riche, provenant des nombreuses propriétés des courbes rationnelles (voir par exemple [1], [5] et [7]). Pour les définir on considère un espace vectoriel U de dimension deux sur $\mathbb{C}$. On note $S_i = \mathrm{Sym}^i U$ les puissances symétriques de U, $(X_0, \cdots, X_n)$ les coordonnées de $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(S_n)$ et $C_n \subset \mathbb{P}^{n\vee} = \mathbb{P}(S_n^\vee)$ l'image de $\mathbb{P}(S_1^\vee)$ par le morphisme de Veronese.

Définition 2.3 ([7], prop. 2)**.** *Pour tout entier m tel que $m \geq n$, le fibré de Steiner défini par la suite exacte suivante :*

$$0 \longrightarrow S_{m-n} \otimes O_{\mathbb{P}(S_n)}(-1) \xrightarrow{M} S_m \otimes O_{\mathbb{P}(S_n)} \longrightarrow E_m(C_n) \longrightarrow 0$$

où

$${}^tM = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & X_0 & X_1 & \cdots & X_n & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & X_0 & X_1 & \cdots & X_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X_0 & X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix}.$$

est appelé fibré de Schwarzenberger associé à la courbe C_n.

Lorsque un groupe de points Z en position linéaire générale et de longueur $k \geq n+2$ appartient à une courbe rationnelle normale $C_n \subset \mathbb{P}^{n\vee}$, le fibré logarithmique $E(Z)$ est un fibré de Schwarzenberger. Alors, la correspondance $Z \rightsquigarrow E(Z)$ n'est pas injective. Réciproquement, si la correspondance n'est pas injective alors le groupe de points Z appartient à une courbe rationnelle normale. Ce résultat d'injectivité, que nous énonçons plus formellement ci-dessous, a été prouvé par Dolgachev et Kapranov ([5], thm. 7.2 pour $k \geq 2n+3$, et [10], cor. 3.1 pour $k \geq n+2$, en étudiant les hyperplans instables de $E(Z)$).

Théorème 2.4. *Soient Z et Z' deux groupes de points de longueur $k \geq n+2$ en position linéaire générale dans $\mathbb{P}^{n\vee}$ pour lesquels, on a $E(Z) \simeq E(Z')$. Alors, un des deux cas suivants se produit :*
1) $Z = Z'$.
2) Z et Z' sont sur une même courbe rationnelle normale C_n et $E(Z) \simeq E_{k-2}(C_n)$.

3 Construction élémentaire I

Considérons la variété d'incidence points-hyperplans de $\mathbb{P}^n$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{n\vee} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^n & & \end{array}$$

Les points de $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{P}^{n\vee}$ seront notés x et $H^\vee$ (resp. x et $l^\vee$ pour $n=2$), H et $x^\vee$ (resp. l et $x^\vee$ pour $n=2$) désignerons les hyperplans de $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{P}^{n\vee}$. On dira qu'un groupe de points Z est en position $(r+1)$-générale dans $\mathbb{P}^{n\vee}$ s'il n'est pas contenu dans une hypersurface de degré $r+1$ (en particulier il est de longueur $\geq \binom{n+r+1}{n}$) et si chaque sous-groupe de longueur $s \leq \binom{n+r}{n-1}$ contenu dans un hyperplan $x^\vee$, impose s conditions linéairement indépendantes sur les hypersurfaces de degré $(r+1)$ de $x^\vee$. En d'autres termes, la dimension $h^0(\mathcal{J}_Z(r+1)\otimes O_{x^\vee})$ est constante pour tout $x^\vee$. Cette hypothèse ad hoc correspond à la condition de position linéaire générale (requise pour les fibrés logarithmiques) lorsque $r=0$.

Proposition 3.1. *Soient $Z \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ un groupe de points en position $(r+1)$-générale et $\mathcal{J}_Z$ son faisceau d'idéaux. Alors, $[p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)]^\vee(-1)$ est un fibré de Steiner de rang $\binom{n+r}{n-1}$ sur $\mathbb{P}^n$.*

Démonstration. Soit $x^\vee$ un hyperplan de $\mathbb{P}^{n\vee}$. On note $|Z\cap x^\vee|$ le nombre de points de l'intersection et $\mathcal{J}_{Z\cap x^\vee}$ le faisceau d'idéaux de $Z\cap x^\vee$ dans $x^\vee$. On a alors :

$$\mathcal{J}_Z(r+1)\otimes O_{x^\vee} = O_{Z\cap x^\vee}\oplus \mathcal{J}_{Z\cap x^\vee}(r+1). \tag{1}$$

Comme Z est en position $(r+1)$-générale, la dimension $h^0(\mathcal{J}_Z(r+1)\otimes O_{x^\vee})$ est constante pour tout $x^\vee$. En particulier, lorsque $x^\vee$ ne coupe pas Z, l'égalité ci-dessus donne,

$$h^0(\mathcal{J}_Z(r+1)\otimes O_{x^\vee}) = h^0(O_{x^\vee}(r+1)) = \binom{n+r}{n-1}.$$

Autrement dit, $p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)$ est un fibré sur $\mathbb{P}^n$ de rang $\binom{n+r}{n-1}$ et $R^1p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)=0$. Afin de montrer que $p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)$ est un fibré de Steiner, nous considérons maintenant la résolution minimale de $\mathbb{F}$ dans le produit $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^{n\vee}$

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^{n\vee}}(-1,-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^{n\vee}} \longrightarrow O_{\mathbb{F}} \longrightarrow 0.$$

On tensorise cette suite par $pr_2^*\mathcal{J}_Z(r+1)$ (où pr_2 est la projection de $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^{n\vee}$ sur le second facteur) et on prend son image directe sur $\mathbb{P}^n$. Comme $h^0(\mathcal{J}_Z(r+1))=0$ et $R^1p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)=0$, on a bien

$$0 \longrightarrow p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(r))\otimes O_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(r+1))\otimes O_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

$\square$

Proposition 3.2. *Soient $Z=\{H_1^\vee,\cdots,H_k^\vee\}\subset\mathbb{P}^{n\vee}$ un groupe de points en position $(r+1)$-générale et E un fibré vectoriel apparaissant dans une extension*

$$0 \longrightarrow (S^{r+1}\Omega_{\mathbb{P}^n})(r) \longrightarrow E \longrightarrow \oplus_{i=1}^k O_{H_i} \longrightarrow 0.$$

Alors, $E\simeq[p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)]^\vee(-1)$.

Remarque 3.3. Lorsque $r = 0$, ce sont les fibrés logarithmiques de rang n sur $\mathbb{P}^n$.

Démonstration. Comme $\mathcal{E}xt^1(O_{H_i}, O_{\mathbb{P}^n}) = O_{H_i}(1)$, on obtient en dualisant l'extension définissant E la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow E^\vee(-1) \longrightarrow S^{r+1}\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \oplus_{i=1}^k O_{H_i} \longrightarrow 0.$$

Pour tout $1 \leq i \leq k$ la flèche surjective $S^{r+1}\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow O_{H_i}$ se factorise par la restriction

$$S^{r+1}\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow S^{r+1}(\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes O_{H_i}) \longrightarrow O_{H_i}.$$

Or ce fibré restreint est

$$S^{r+1}(\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes O_{H_i}) = O_{H_i} \bigoplus_{1 \leq j \leq r+1} S^j(\Omega^\vee_{H_i}(-1)).$$

Comme $\mathrm{Hom}(S^j(\Omega^\vee_{H_i}(-1)), O_{H_i}) = 0$, on en déduit que

$$\mathrm{Hom}(S^{r+1}\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1), \oplus_{i=1}^k O_{H_i}) = \mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^k O_{H_i}, \oplus_{i=1}^k O_{H_i}).$$

Par conséquent, deux extensions générales (i.e. deux fibrés vectoriels) correspondent à deux matrices diagonales M_ϕ, M_ψ de rang maximal. On en déduit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(\phi) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & S^{r+1}\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\simeq"'] & \oplus_{i=1}^k O_{H_i} \arrow[r] \arrow[d, "M_\psi M_\phi^{-1}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(\psi) \arrow[r] & S^{r+1}\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \arrow[r, "\psi"] & \oplus_{i=1}^k O_{H_i} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ce qui prouve l'unicité du noyau lorsqu'il est un fibré.

On montre que ce noyau unique est $p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)$. En effet, l'image par p_*q^* de la suite exacte ci-dessous

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{n\vee}}(r+1) \longrightarrow O_Z \longrightarrow 0$$

donne

$$0 \longrightarrow p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow S^{r+1}\Omega^\vee_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \oplus_{i=1}^k O_{H_i} \longrightarrow 0.$$

□

En particulier, lorsque $r = 0$, on retrouve le fibré logarithmique $E(Z)$ associé à Z. Plus précisément, sous les hypothèses de la proposition 3.2, on a montré :

$$E(Z)^\vee(-1) = p_*q^*\mathcal{J}_Z(1).$$

Dans ce sens, les fibrés $p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)$ pour $r \geq 0$ sont bien une généralisation des fibrés logarithmiques et la question sur la biunivocité de la correspondance

$$Z \rightsquigarrow p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)$$

reste légitime. On notera à partir de maintenant $E_{r+1}(Z) := [p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)]^\vee(-1)$.

4 Construction élémentaire II

Soient $X \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ une courbe intègre non dégénérée de degré $n+r$. Appelons $\overline{q}$ le morphisme de projection de $q^{-1}(X)$ sur X (restriction du morphisme $q : \mathbb{F} \to \mathbb{P}^{n\vee}$) et $\overline{p}$ celui de $q^{-1}(X)$ sur $\mathbb{P}^n$ (restriction du morphisme $p : \mathbb{F} \to \mathbb{P}^n$). Le morphisme $\overline{p}$ est un revêtement de degré $(n+r)$ de $\mathbb{P}^n$.

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de rang 1 sur la courbe X tel que $h^1(\mathcal{L}(-1)) = 0$. Alors $E(X, \mathcal{L}) := \overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L}$ est un faisceau de Steiner de rang égal au degré de X.*

Remarque 4.2. Ces faisceaux sont des fibrés de Steiner lorsque $h^0(\mathcal{L} \otimes O_{x^\vee})$ est constant. Ceci impose que le faisceau $\mathcal{L}$ soit inversible mais la courbe peut-être singulière (exemple 5.10). Ces fibrés généralisent les fibrés de Schwarzenberger qui proviennent des images directes des faisceaux inversibles sur les courbes rationnelles normales. Arrondo propose une autre généralisation des fibrés de Schwarzenberger ([2], déf. page 6) qui, aux détails près, englobe la nôtre.

Démonstration. La dimension relative étant nulle on a $R^1\overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L} = 0$. Par conséquent, $\overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L}$ est un faisceau de Steiner sur $\mathbb{P}^n$ avec présentation :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}(-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \otimes O_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

Son rang est égal à $h^0(\mathcal{L}) - h^0(\mathcal{L}(-1)) = \deg(X) = n + r$. □

5 Hyperplans instables

Soit $E \in \mathcal{S}_{n,n+r,m}$ un fibré de Steiner. L'ensemble $W(E)$ de ses hyperplans instables est (définition que Dolgachev étend aux faisceaux dans [4]) :

$$W(E) := \{H^\vee \in \mathbb{P}^{n\vee}, H^0(E_H^\vee) \neq 0\}.$$

Pour le déterminer explicitement, on utilisera l'égalité $W(E) = \mathrm{supp}(R^{n-1}q_*p^*E(-n))$ qui provient de la dualité de Serre $h^0(E_H^\vee) = h^{n-1}(E_H(-n))$.
Lorsque $E = O_{\mathbb{P}^n} \oplus F$, ou bien $E = \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \oplus F$, ou bien encore lorsque $m+n+r > mn$, il est clair que $H^0(E_H^\vee) \neq 0$ pour tout $H^\vee \in \mathbb{P}^{n\vee}$. On s'intéressera plutôt aux fibrés de Steiner pour lesquels l'hyperplan général n'est pas instable.

Proposition 5.1. *Soit $E \in \mathcal{S}_{n,n+r,m}$. La codimension attendue du lieu $W(E)$ des hyperplans instables dans $\mathbb{P}^{n\vee}$ est $mn - (m+n+r) + 1$.*

Démonstration. Cela résulte de la formule de Thom-Porteous appliquée à la résolution du faisceau $R^{n-1}q_*p^*E(-n)$:

$$H^{n-1}(E(-n-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^{n\vee}}(-1) \longrightarrow H^{n-1}(E(-n)) \otimes O_{\mathbb{P}^{n\vee}} \longrightarrow R^{n-1}q_*p^*E(-n) \longrightarrow 0.$$

□

Exemple 5.2. Sur $\mathbb{P}^2$, considérons un fibré de Steiner E possédant une résolution du type :

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{r+2}(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{2r+4} \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Quitte à choisir $E \in \mathcal{S}_{2,r+2,r+2}$ assez général, nous pouvons supposer que $h^0(E_l(-2)) = 0$ pour l générale. Nous avons alors une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1)^{r+2} \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}^{r+2} \longrightarrow R^1 q_* p^* E(-2) \longrightarrow 0.$$

Ceci prouve que $W(E)$ est une courbe de degré $r+2$.

Proposition 5.3. *Soient Z un groupe de points de $\mathbb{P}^{n\vee}$ en position $(r+1)$-générale et $E_{r+1}(Z)$ le logarithmique généralisé qui lui est associé. Alors $Z \subset W(E_{r+1}(Z))$.*

Remarque 5.4. Nous verrons (théorème 6.4) que sur le plan projectif $W(E_{r+1}(Z)) = Z$ si et seulement si $h^0(\mathcal{J}_Z(r+2)) = 0$.

Démonstration. Soit $H^\vee \in Z$. La suite exacte sur $\mathbb{P}^{n\vee}$ reliant les faisceaux d'idéaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow \mathcal{J}_{Z\setminus\{H^\vee\}}(r+1) \longrightarrow O_{H^\vee} \longrightarrow 0$$

induit par image réciproque et image directe la suite exacte suivante sur $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow p_*q^*\mathcal{J}_{Z\setminus\{H^\vee\}}(r+1) \longrightarrow O_H \longrightarrow 0.$$

Il suffit alors de dualiser cette suite et de la tensoriser par $O_{\mathbb{P}^n}(-1)$ pour vérifier que $H^\vee \in W(p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1))$. □

On a un résultat de même nature pour les fibrés de Steiner provenant de faisceaux inversibles sur une courbe.

Proposition 5.5. *Soient $X \subset \mathbb{P}^{n\vee}$ une courbe intègre non dégénérée de degré $n+r$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible non spécial sur X. Alors, $X \subset W(E(X, \mathcal{L}(1))$.*

Démonstration. Il est clair, en appliquant le foncteur $\overline{p}_*\overline{q}^*$ à la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(1 - H^\vee) \longrightarrow \mathcal{L}(1) \longrightarrow O_{H^\vee} \longrightarrow 0$$

que tout point $H^\vee$ de la courbe fournit un hyperplan instable H de $\overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L}(1)$. □

Dans $\mathbb{P}^{n\vee}$ avec $n \geq 3$, il semble difficile comme l'a aussi remarqué E. Arrondo ([2], rem. 2.9) de prouver que les deux ensembles coïncident. En effet, on peut avoir une surface d'hyperplans instables pour un fibré provenant d'un faisceau inversible sur une courbe de cette surface, comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple 5.6. Soient C une courbe lisse de degré 4 de $\mathbb{P}^{3\vee}$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur C de degré égal à 6. Le fibré de Steiner associé $E(C, \mathcal{L})$ est un fibré de rang 4 sur $\mathbb{P}^3$:

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}^2(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}^6 \longrightarrow E(C, \mathcal{L}) \longrightarrow 0.$$

Si le plan général n'est pas instable, $W(E(C, \mathcal{L}))$ est une surface quadrique contenant strictement la courbe C.

Par contre dans le plan projectif, dès lors que la droite générale n'est pas instable, il y a égalité.

Proposition 5.7. *Soit $E \in \mathcal{S}_{2,r+2,m}$. Supposons que $W(E) \neq \mathbb{P}^{2\vee}$ et que $W(E)$ contienne une courbe X_{r+2} de degré $r+2$. Alors, $W(E) = X_{r+2}$.*

Cette proposition repose sur le lemme qui suit.

Lemme 5.8. *Soit $E \in \mathcal{S}_{2,r+2,m}$. On suppose qu'il existe une droite $x^\vee$ de $\mathbb{P}^{2\vee}$ qui est $(r+3)$-sécante à $W(E)$. Alors, $x^\vee \subset W(E)$.*

Démonstration. Soient $l_1, \cdots, l_{r+3}$ des droites instables pour E, concourantes en un point $x \in \mathbb{P}^2$. Considérons l'éclatement $\tilde{\mathbb{P}}$ de $\mathbb{P}^2$ le long de x et le diagrammme d'incidence induit :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\tilde{q}} & x^\vee \\ {\scriptstyle \tilde{p}}\big\downarrow & & \\ x \in \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

Appliquons le foncteur $\tilde{q}_*\tilde{p}^*$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow E^\vee \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{m+r+2} \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{m}(1) \longrightarrow 0.$$

Comme $\tilde{q}_*\tilde{p}^* O_{\mathbb{P}^2}(1) = \Omega^\vee_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) \otimes O_{x^\vee} = O_{x^\vee} \oplus O_{x^\vee}(1)$, on obtient un homomorphisme

$$O_{x^\vee}^{m+r+2} \xrightarrow{M} O_{x^\vee}^{m} \oplus O_{x^\vee}^{m}(1).$$

Par hypothèse, les mineurs maximaux de M s'annulent tous aux points $l_1^\vee, \cdots, l_{r+3}^\vee$ de $x^\vee$. Cependant, un mineur maximal, s'il est non nul, est de degré au plus $(r+2)$; il s'annule donc en au plus $r+2$ points de $x^\vee$. On en déduit que M n'est pas de rang maximal i.e. que son noyau, qui par fonctorialité ne peut être que $\tilde{q}_*\tilde{p}^* E^\vee$, est de rang supérieur ou égal à 1. En d'autres termes $h^0(E^\vee \otimes O_l) \neq 0$ pour tout $l^\vee \in x^\vee$, c'est-à-dire $x^\vee \subset W(E)$. □

Démonstration de la proposition 5.7. Supposons qu'il existe un point $l^\vee \in W(E)$ et $l^\vee \notin X_{r+2}$. Dans $\mathbb{P}^{2\vee}$, toute droite $x^\vee$ passant par $l^\vee$ est $(r+3)$-sécante à $W(E)$. D'après le lemme 5.8, $x^\vee \subset W(E)$. Ceci contredit l'hypothèse $W(E) \neq \mathbb{P}^{2\vee}$. □

Nous développons, pour terminer cette partie, le cas $r = 1$ de la proposition 5.7. Il s'agit des fibrés de Steiner de rang 3 sur $\mathbb{P}^2$ qui possèdent une courbe (cubique lisse ou singulière) de droites instables. Nous considérons dans un premier temps (Famille I, ci-dessous) les fibrés $\overline{p}_*\overline{q}^* O_C(n)$ (où $n \geq 2$, C est une cubique lisse et en reprenant les notations de la proposition 4.1). Nous verrons (prop. 5.9) que l'hypothèse $W(E) \neq \mathbb{P}^{2\vee}$ dans la proposition 5.7 n'était pas superflue.

Dans un second temps (Famille II, ci-dessous) nous considérons les fibrés de Steiner obtenus comme restrictions planes de fibrés de Schwarzenberger sur $\mathbb{P}^3$. Ces derniers sont associés à une cubique rationnelle normale $C_3 \subset \mathbb{P}^{3\vee}$ et les points de C_3 sont leurs plans instables ([10], prop. 2.2). La restriction d'un de ces fibrés à un plan général $H \subset \mathbb{P}^3$ est un fibré de Steiner de rang 3 sur H. Nous montrons (prop. 5.10) que les droites instables du fibré restreint sont les duales des points de la cubique singulière qui est l'image de C_3 par la projection de centre $H^\vee$.

Famille I. Soit une cubique lisse, notée $C \subset \mathbb{P}^{2\vee}$. Considérons le diagramme d'incidence "point-droite" au-dessus de C :

$$\begin{array}{ccccc} C & \xleftarrow{\overline{q}} & q^{-1}(C) \subset \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{2\vee} \\ & & \overline{p}\downarrow p & & \\ & & \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

Proposition 5.9. *$\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(2) = S^2(\Omega^\vee_{\mathbb{P}^2}(-1))$, en particulier toute droite de $\mathbb{P}^2$ est instable pour $\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(2)$. Par contre, pour $n \geq 3$, $W(\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(n)) = C$.*

Démonstration. En appliquant le foncteur p_*q^* à la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(2) \longrightarrow O_C(2) \longrightarrow 0$$

et en utilisant le fait que $p_*q^*O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) = R^1p_*q^*O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) = 0$, on obtient l'égalité $\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(2) = S^2(\Omega^\vee_{\mathbb{P}^2}(-1))$. En particulier toute droite l du plan est instable car

$$S^2(\Omega^\vee_{\mathbb{P}^2}(-1)) \otimes O_l = O_l \oplus O_l(1) \oplus O_l(2).$$

Lorsque $n \geq 3$, il suffit d'après la proposition 5.7, de montrer qu'une droite générale n'est pas instable pour le fibré $\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(n)$. L'application naturelle

$$H^0(\Omega^\vee_{\mathbb{P}^2}(-1) \otimes O_l) \to H^0(N_{l/\mathbb{P}^2}(-1)) = \mathbb{C}$$

n'est rien d'autre que l'évaluation des formes linéaires sur $\mathbb{P}^{2\vee}$ au point $l^\vee \in \mathbb{P}^{2\vee}$. En prenant la puissance symétrique troisième, la composition

$$O_l \longrightarrow O_l \oplus O_l(1) \oplus O_l(2) \oplus O_l(3) \longrightarrow O_l$$

consiste à évaluer la cubique C au point $l^\vee$. Il apparaît, en tensorisant par O_l la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow S^3(\Omega^\vee_{\mathbb{P}^2}(-1)) \longrightarrow \overline{p}_*\overline{q}^*O_C(3) \longrightarrow 0,$$

que la droite l est instable si et seulement si la composition ci-dessus est nulle. On en déduit que $W(\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(3)) = C$.
Une injection $O_C(n) \hookrightarrow O_C(n+1)$ induit sur $\mathbb{P}^2$ une injection $\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(n) \hookrightarrow \overline{p}_*\overline{q}^*O_C(n+1)$. Ceci prouve l'inclusion $W(\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(n+1)) \subset W(\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(n))$. Ainsi, pour tout $n \geq 3$, nous avons montré $W(\overline{p}_*\overline{q}^*O_C(n)) = C$. □

Famille II. Soient $n \geq 1$ un entier et $E_{n+3}(C_3)$ le fibré de Schwarzenberger sur $\mathbb{P}(S_3)$ associé à un diviseur de degré $n+3$ sur la cubique gauche $C_3 \subset \mathbb{P}(S_3^\vee)$. Il est défini par :

$$0 \longrightarrow S_n \otimes O_{\mathbb{P}(S_3)}(-1) \xrightarrow{M} S_{n+3} \otimes O_{\mathbb{P}(S_3)} \longrightarrow E_{n+3}(C_3) \longrightarrow 0,$$

où la matrice M est explicitée dans la définition 2.3. Considérons la restriction de cette suite exacte à un plan général $H = \mathbb{P}(S_3/\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}(S_3)$. Notons $\overline{C_3}$ la cubique singulière (cuspidale ou à point double) image de C_3 par la projection de centre $H^\vee$ et $E_{n+3}(\overline{C_3})$ la restriction du fibré de Schwarzenberger $E_{n+3}(C_3)$:

$$0 \longrightarrow S_n \otimes O_{\mathbb{P}(S_3/\mathbb{C})}(-1) \longrightarrow S_{n+3} \otimes O_{\mathbb{P}(S_3/\mathbb{C})} \longrightarrow E_{n+3}(\overline{C_3}) \longrightarrow 0.$$

Proposition 5.10. *Soit $n \geq 2$ un entier, alors $W(E_{n+3}(\overline{C_3})) = \overline{C_3}$.*

Démonstration. Compte tenu de la décomposition équilibrée de $E_{n+3}(C_3)$ sur une droite générale de $\mathbb{P}^3$ ([8], prop. 2.18), une droite générale de H n'est pas instable pour $E_{n+3}(\overline{C_3})$. On sait ([10], prop. 2.2) que les plans instables de $E_{n+3}(C_3)$ sont les plans $H_{u,v}$ d'équations

$$u^3X_0 + u^2vX_1 + uv^2X_2 + v^3X_3 = 0, \text{ pour } (u, v) \in \mathbb{P}(S_1).$$

L'homomorphisme surjectif $E_{n+3}(C_3) \to O_{H_{u,v}}$ induit, par restriction à H, une surjection

$$E_{n+3}(\overline{C_3}) \to O_{H_{u,v} \cap H}.$$

Par conséquent les droites $H_{u,v} \cap H$ du plan H, qui sont les droites duales des points de $\overline{C_3}$, sont les droites instables de $E_{n+3}(\overline{C_3})$. On conclut grâce à la proposition 5.7.

□

6 Théorème de "type Torelli" sur le plan projectif

Sur le plan projectif, la condition "position $(r+1)$-générale" s'exprime en termes de droites $(r+3)$-sécantes. Plus précisément, si Z est un groupe de points de $\mathbb{P}^{2\vee}$, on a d'après l'égalité (1) apparaissant dans la preuve de la proposition 3.1 :

$$h^1(\mathcal{J}_Z(r+1) \otimes O_{x^\vee}) \neq 0 \Leftrightarrow \mid x^\vee \cap Z \mid \geq r+3.$$

Par conséquent, si Z ne possède pas de $(r+3)$-sécante, le faisceau $p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)$ est un fibré de rang $(r+2)$ sur $\mathbb{P}^2$. De plus, si $h^0(\mathcal{J}_Z(r+1)) = 0$, il est un fibré de Steiner :

$$0 \longrightarrow p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(r)) \otimes O_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(r+1)) \otimes O_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0.$$

La proposition suivante fait le lien entre droite instable l et courbe passant par $Z \cup l^\vee$.

Proposition 6.1. *Soient Z un groupe de points de $\mathbb{P}^{2\vee}$ en position $(r+1)$-générale et $l^\vee \notin Z$. Alors, $l \in W(E_{r+1}(Z))$ si et seulement si $h^0(\mathcal{J}_{Z \cup l^\vee}(r+2)) \neq 0$.*

Remarque 6.2. Si le cardinal de Z est strictement plus petit que $\binom{r+4}{2} - 1$ il résulte de cette proposition que toute droite du plan est instable. Par ailleurs, il apparaît que si Z est contenu dans une courbe de degré $r+2$, alors tout point de cette courbe appartient à $W(E_{r+1}(Z))$.

Démonstration. Notons $\widehat{\mathbb{P}}$ l'éclatement de $\mathbb{P}^{2\vee}$ le long du point $l^\vee$. Rappelons que $\widehat{\mathbb{P}} \simeq p^{-1}(l) \subset \mathbb{F}$ et considérons le diagramme d'incidence induit :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\widehat{q}} & \mathbb{P}^{2\vee} \\ {\scriptstyle \widehat{p}}\downarrow & & \\ l & & \end{array}$$

Comme Z n'a pas de $r+3$ sécante on a (on pourra se référer à la prop. 2.1 de [9] pour plus de détails et bien-sûr au livre [6]) :

$$p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1) \otimes O_l = \widehat{p}_*\widehat{q}^*\mathcal{J}_Z(r+1).$$

Ainsi la droite l est instable pour le fibré $p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1)$ si et seulement s'il existe un homomorphisme injectif

$$O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{p}_*\widehat{q}^*\mathcal{J}_Z(r+1).$$

Ceci équivaut à la donnée d'une application sur $\widehat{\mathbb{P}}$

$$\widehat{p}^*O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{q}^*\mathcal{J}_Z(r+1)$$

ou encore, si l'on note $\mathfrak{m}_{l^\vee}$ l'idéal maximal du point $l^\vee$, à la donnée d'une section non nulle

$$O_{\mathbb{P}^{2\vee}} \hookrightarrow \mathcal{J}_Z(r+1)\otimes \mathfrak{m}_{l^\vee}(1) = \mathcal{J}_{Z\cup l^\vee}(r+2).$$

□

On peut reformuler cette proposition en termes de fibrés vectoriels de rang deux.

Proposition 6.3. *Soient Z un groupe de points de $\mathbb{P}^{2\vee}$ en position $(r+1)$-générale et F une extension générale*

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}} \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{J}_Z(r+2) \longrightarrow 0.$$

Alors $E_{r+1}(Z)^\vee(-1) = p_*q^*(F(-1))$. De plus $l \in W(E_{r+1}(Z))$ si et seulement s'il existe une section non nulle de F qui s'annule au point $l^\vee$.

Démonstration. Comme $p_*q^*O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) = 0$ et $R^1p_*q^*O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) = 0$, on a bien $E_{r+1}(Z)^\vee(-1) = p_*q^*(F(-1))$. L'existence d'une droite instable l fournit une application injective

$$O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{p}_*\widehat{q}^*F(-1).$$

Ceci équivaut à la donnée d'une appplication sur $\widehat{\mathbb{P}}$

$$\widehat{p}^*O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{q}^*F(-1)$$

ou encore, si l'on note $\mathfrak{m}_{l^\vee}$ l'idéal maximal du point $l^\vee$, à la donnée d'une section non nulle

$$O_{\mathbb{P}^{2\vee}} \hookrightarrow F(-1)\otimes \mathfrak{m}_{l^\vee}(1).$$

On peut remarquer que si $l^\vee \notin Z$ on aura $h^0(F) \geq 2$, c'est-à-dire $h^0(\mathcal{J}_Z(r+2)) \neq 0$. □

Théorème 6.4. *Soient Z et Z' deux groupes de points de $\mathbb{P}^{2\vee}$ de même longueur et en position $(r+1)$-générale. On suppose $E_{r+1}(Z) \simeq E_{r+1}(Z')$. Alors un des deux cas suivants se produit :*
1) $Z = Z'$.
2) Z et Z' sont sur une même courbe X_{r+2} de degré $r+2$ et il existe un faisceau $\mathcal{L}$ de rang 1 sur X_{r+2} tel que $E_{r+1}(Z) \simeq E(X_{r+2}, \mathcal{L})$.

Démonstration. Si $Z \neq Z'$ il existe au moins une droite l telle que $l^\vee \notin Z$ et pourtant $l^\vee \in W(E_{r+1}(Z))$. D'après la proposition 6.1, il existe une courbe de degré $r+2$ contenant Z. Soient X_{r+2} une telle courbe et $\{f=0\}$ son équation. Elle induit la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) \xrightarrow{\ f\ } \mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{L}$ est donné par la restriction du faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_Z(r+1)$ à la courbe X_{r+2}. Comme $p_*q^*O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) = 0$ et $R^1p_*q^*O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) = 0$ on en déduit que

$$p_*q^*\mathcal{J}_Z(r+1) = \overline{p}_*\overline{q}^*\mathcal{L}.$$

Ce qui prouve le théorème.

□

Références

[1] Ancona, V., Ottaviani, G. : Unstable hyperplanes for Steiner bundles and multidimensional matrices. Adv. Geom., **1**, 165–192 (2001)

[2] Arrondo, E. : Schwarzenberger bundles of arbitary rank on the projective space. Preprint. arXiv.org, math.AG/0807.1645

[3] Deligne, P. : Théorie de Hodge II. Publ. Math. IHES **40**, 5–58 (1971)

[4] Dolgachev, I. : Logarithmic sheaves attached to arrangements of hyperplanes. J. Math. Kyoto Univ. **47**, 35–64 (2007)

[5] Dolgachev, I., Kapranov, M. : Arrangements of hyperplanes and vector bundles on $\mathbb{P}_n$. Duke Math. J. **71**, 633–664 (1993)

[6] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. : Vector Bundles on Complex Projective Spaces. Birkhäuser, Boston (1980)

[7] Schwarzenberger, R.L.E. : Vector bundles on the projective plane. Proc. Lond. Math. Soc. **11**, 623–640 (1961)

[8] Spindler, H., Trautmann, G. : Rational normal curves and the geometry of special instanton bundles on $\mathbb{P}^{2n+1}$. Math. Gottingensis **18**, (1987)

[9] Vallès, J. : Fibrés logarithmiques sur le plan projectif. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **14**(2), 385–395 (2006)

[10] Vallès, J. : Nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner. Math. Z. **233**, 507–514 (2000)

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau
Université de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'Université
64000 Pau (France)
email : jean.valles@univ-pau.fr